DÉPARTEMENT

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies

L I C E N C E

ANNÉE 2007 -2008 session d'automne

UE : MHT511

Épreuve : Algèbre 4

Date : 19 décembre 2007 *Durée :* 3 heures

Épreuve de : M. Qing Liu

Tous documents interdits

Exercice 1 (*Irréductibilité de polynômes*) Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans les anneaux indiqués :

1. $X^5Y + Y^5Z + Z^5X$ dans $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$;
2. $X^3 + 3X + 2$ dans $\mathbb{F}_5[X]$;
3. $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2 (*Valeurs spéciales des polynômes cyclotomiques*) Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On note $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme cyclotomique qui s'annule sur les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

1. Rappeler l'expression de $\Phi_{p^r n}(X)$ lorsque p est un nombre premier ne divisant pas n et r est un entier naturel.
2. Supposons que n a au moins deux facteurs premiers. Montrer que $\Phi_n(0)$ et $\Phi_n(1)$ valent 1.
3. Supposons que n est le produit de k nombres premiers deux à deux distincts. Montrer que $\Phi_n'(0) = (-1)^{k-1}$. Dans le cas contraire (donc si n a un facteur carré), montrer que $\Phi_n'(0) = 0$.

Exercice 3 (*Extensions quadratiques*) Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$.

1. Soit F/K une extension quadratique (c'est-à-dire que $[F : K] = 2$). Montrer qu'il existe $\alpha \in F^*$, $\alpha \notin K$, tel que $\alpha^2 \in K$ et que $F = K[\alpha]$. Montrer que $\{1, \alpha\}$ est une base de F en tant que K-espace vectoriel.
2. Montrer que $\beta \in F$ satisfait les propriétés de α ci-dessus si et seulement si $\beta = b\alpha$ pour un certain $b \in K^*$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

3. Prenons $K = \mathbb{F}_p$ un corps premier à $p \geq 3$ éléments. Soit $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. Soient $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{F}}_p^*$ avec $\alpha, \beta \notin \mathbb{F}_p$ et $\alpha^2, \beta^2 \in \mathbb{F}_p$. Montrer que $\alpha/\beta \in \mathbb{F}_p$.

Exercice 4 (*Sous-extensions quadratiques*) Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit L/K une extension. Notons

$$R = \{\alpha \in L^* \mid \alpha^2 \in K, \alpha \notin K\}.$$

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R$ tels que pour tout $k \leq n$, on ait $\alpha_k \notin K[\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}]$.

1. Montrer que pour tout $k \leq n$, on a $[K[\alpha_1, ..., \alpha_k] : K[\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}]] = 2$ et
$$[K[\alpha_1, ..., \alpha_k] : K] = 2^k$$
2. Soit $I = \{k_1, ..., k_s\}$ une partie de $\{1, ..., n\}$ à s éléments. Montrer que
$$\alpha_I := \alpha_{k_1} \cdots \alpha_{k_s} \in R.$$
3. Soit $k \leq n$ et soit $\alpha \in K[\alpha_1, ..., \alpha_k] \cap R$. En écrivant $\alpha = \lambda\alpha_k + \mu$ avec $\lambda, \mu \in K[\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}]$, montrer que $\lambda\mu = 0$.
   (a) Si $\mu = 0$, montrer que $\lambda \in K^*$ ou $\lambda \in K[\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}] \cap R$.
   (b) Si $\lambda = 0$, montrer que $\alpha \in K[\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}] \cap R$.
   En déduire par récurrence sur k qu'il existe $b \in K^*$ et I une partie de $\{1, 2, ..., n\}$ telle que $\alpha = b\alpha_I$.
4. Calculer les degrés sur $\mathbb{Q}$ des sous-extensions
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}], \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}], \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}]$$
   de $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $K[\alpha_1, ..., \alpha_n]$ admet exactement $2^n - 1$ sous-K-extensions quadratiques qui sont les $K[\alpha_I]$, I parcourant les parties non-vides de $\{1, ..., n\}$. En déduire que si L/K est finie, alors L n'a qu'un nombre fini de sous-extensions quadratiques, ce nombre étant majoré par $[L : K] - 1$.

Fin

Le corrigé sera disponible dans le contrat pédagogique de l'UE avant le 20 décembre.