Collège S & T	**Année universitaire 2018-2019** **Session 1 d'automne** **Parcours : 4TMF5** **Code UE : 4TMF502U** **Épreuve : Structures algébriques 2** **Date : 18/12/2018** **Heure : 14h30–17h30** Documents non autorisés. Calculette homologuée autorisée. Épreuve de M. Qing LIU

Exercice 1 Considérons

$$\Phi(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X].$$

Est-il irréductible, respectivement, dans $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 2 Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ non inversibles. Montrer que s'il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ avec $UP + VQ = 1$ alors P, Q sont premiers entre eux. Montrer par un exemple que la réciproque n'est pas vraie.

Exercice 3 Soit F un corps fini. En considérant le polynôme $1+\prod_{\lambda\in F}(X-\lambda) \in F[X]$, montrer que F n'est pas algébriquement clos.

Exercice 4 Soit F un corps fini de caractéristique p (non nécessairement égal à un $\mathbb{F}_p$). Soit $d \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe une extension finie F_d/F de degré d.
2. En utilisant la structure du groupe F_d^*, montrer qu'il existe $\alpha \in F_d$ tel que $F_d = F[\alpha]$.
3. Montrer qu'il existe un polynôme irréductible de degré d dans $F[X]$.

Exercice 5 Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire irréductible de degré 3.

1. Expliquer pourquoi $P(X)$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $P(X)$ possède une racine réelle. Montrer que si toutes les racines sont réelles, alors le discriminant du polynôme dérivé $P'(X)$ est strictement positif (utiliser l'analyse réelle).
3. Supposons dans la suite de cet exercice que $P(X)$ a seulement une racine réelle α_0. Quel est le degré $[\mathbb{Q}[\alpha_0] : \mathbb{Q}]$?
4. Montrer que $P(X)$ se décompose en produit de facteurs de degré au plus 2 dans $\mathbb{Q}[\alpha_0][X]$.
5. Soit K le corps de décomposition de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$. Quels sont les degrés $[K : \mathbb{Q}[\alpha_0]]$ et $[K : \mathbb{Q}]$?
6. Considérons $F(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $F(X)$ est irréductible. Calculer le degré sur $\mathbb{Q}$ d'un corps de décomposition de $F(X)$.

Exercice 6 Soit p un nombre premier et soit $r \geq 1$.

1. Montrer la relation sur les polynômes cyclotomiques :
$$\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}}).$$
2. Donner une expression explicite de $\Phi_{p^2}(X)$.

Exercice 7 (Théorème des restes chinois) Soit A un anneau (commutatif unitaire), soient I_1, I_2 deux idéaux de A.

1. Rappeler la définition de $I_1 + I_2$ et de $I_1 I_2$.
2. Montrer que $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$.
3. Supposons dans la suite de l'exercice que $I_1 + I_2 = A$. Montrer qu'il existe $u_1 \in I_1, u_2 \in I_2$ tels que
$$1 = u_1 + u_2.$$
4. Soit $x \in I_1 \cap I_2$. En utilisant l'égalité ci-dessus, montrer que $x \in I_1 I_2$. En déduire que $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$.
5. Soient $a, b \in A$. En utilisant de nouveau l'égalité ci-dessus, montrer qu'il existe $c \in A$ tel que $c - a \in I_1$ et $c - b \in I_2$. En déduire que l'homomorphisme d'anneaux $A \to A/I_1 \times A/I_2$ qui à tout $x \in A$ associe $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, où $\bar{x}^1$ (resp. $\bar{x}^2$) désigne l'image de x dans A/I_1 (resp. A/I_2), est surjectif.
6. Montrer que
$$A/I_1 I_2 \simeq A/I_1 \times A/I_2$$
en tant qu'anneaux.
7. Soient $n, m \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Montrer l'isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.