

# Chapitre 1

## Rappels et compléments d'algèbre commutative.

Tous les anneaux considérés dans ce cours sont commutatifs unitaires. Les homomorphismes d'anneaux  $A \rightarrow B$  envoient  $1_A$  sur  $1_B$  par définition.

### 1.1 Anneaux et modules noethériens

Soit  $A$  un anneau (commutatif unitaire).

**Définition 1.1.1** Un  $A$ -module  $M$  est de *type fini* s'il est engendré par une famille finie. Il est *noethérien* si tous ses sous-modules sont de type fini. En particulier  $M$  lui-même est de type fini. On dira que  $A$  est *noethérien* s'il est noethérien en tant que  $A$ -module (équivalent : tout idéal est de type fini).

Concrètement,  $M$  est de type fini s'il existe  $x_1, \dots, x_n \in M$  tels que  $M$  soit engendré par les  $x_i$ . Cela revient à dire que tout  $x \in M$  s'écrit comme  $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$  pour certains  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Quand cela est le cas, on écrit aussi

$$M = Ax_1 + \dots + Ax_n.$$

- Exemple 1.1.2**
1. Un corps est toujours noethérien. Un espace vectoriel sur un corps  $K$  est noethérien si et seulement s'il est de dimension finie.
  2. L'anneau  $\mathbb{Z}$  (ou plus généralement un anneau principal) est noethérien puisque tout idéal est principal.
  3.  $\mathbb{Q}$  est un anneau noethérien, mais comme  $\mathbb{Z}$ -module il n'est pas noethérien.
  4. L'anneau des polynômes à coefficients dans un corps et à une infinité de variables n'est pas noethérien.
  5. L'ensemble des fonctions (resp. fonctions continues ; resp. fonctions  $C^\infty$ ) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un anneau non noethérien.

La proposition suivante nécessite l'axiome du choix.

**Proposition 1.1.3.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$M$  est noethérien ;*
- (ii) *toute suite croissante de sous-modules de  $M$  est stationnaire ;*
- (iii) *tout ensemble non vide de sous-modules de  $M$  admet un élément maximal (pour l'inclusion).*

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). La réunion est un sous-module, de type fini, donc égal à un des sous-modules.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $F$  un tel ensemble. S'il n'a pas d'élément maximal, alors on peut construire une suite strictement croissante infinie avec des sous-modules appartenant à  $F$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $N$  un sous-module. Soit  $F$  l'ensemble des sous-modules de  $N$  de type fini. Alors  $F$  est non vide car il contient  $\{0\}$ . Soit  $N_0$  un élément maximal de  $F$ . Pour tout  $x \in N$ ,  $N_0 + xA \in F$ , donc  $x \in N_0$  et  $N = N_0$  est de type fini.  $\square$

En restant dans les axiomatiques ZF (sans l'axiome du choix donc), (i) n'implique pas (iii). Il est alors possible de définir les modules noethériens avec la propriété (iii) qui est plus forte que (i). Avec cette définition, les énoncés de ce paragraphe restent vrais. Les anneaux qu'on rencontrera dans ce cours sont noethériens dans le sens fort (iii).

**Proposition 1.1.4.** *La classe des  $A$ -modules noethériens est stable par sous-module, quotient, extension (suite exacte) et somme directe finie.*

*Démonstration.* Pour  $M \oplus N$  : utiliser la projection dans  $N$ .  $\square$

**Corollaire 1.1.5.** *Soit  $A$  un anneau noethérien. Alors  $M$  est noethérien si et seulement si  $M$  est de type fini.*

Le théorème suivant ne sera pas montré en cours.

**Theorem 1.1.6.** (Théorème de Transfert de Hilbert) *Si  $A$  est noethérien, alors l'anneau des polynômes  $A[X]$  est noethérien.*

*Démonstration.* Soit  $I$  un idéal de  $A[X]$ . Pour tout  $d \geq 0$ , posons

$$J_d = \{a \in A \mid \exists F(X) = aX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0 \in I\}.$$

C'est l'ensemble des coefficients dominants des polynômes de degré  $d$  dans  $I$  union  $\{0\}$ . C'est un idéal de  $A$  et on a  $J_d \subseteq J_{d+1}$  pour tout  $d \geq 0$ . On a donc une suite croissante d'idéaux dans  $A$ . D'après la proposition 1.1.3, la suite est stationnaire et donc il existe  $N \geq 0$  tel que  $J_d = J_{d+1}$  pour tout  $d \geq N$ . Pour tout  $d \leq N$ , on prend un système de générateurs  $\{a_{d,1}, \dots, a_{d,m_d}\}$  de  $J_d$  (c'est-à-dire que  $J_d$  est engendré par  $\{a_{d,1}, \dots, a_{d,m_d}\}$ ). Pour tout  $j \leq m_d$ , on fixe un élément

$$F_{d,j}(X) = a_{d,j}X^d + \{\text{termes de degré} \leq d-1\} \in I.$$

Montrons que  $I$  est engendré par l'ensemble  $S = \{F_{d,j}(X) \mid 0 \leq d \leq N, 1 \leq j \leq m_d\}$ . Ce qui impliquera que  $I$  est de type fini et donc que  $A[X]$  est noethérien.

Soit  $I'$  l'idéal de  $A[X]$  engendré par  $S$ . Alors  $I' \subseteq I$  car  $S \subseteq I$ . Supposons que  $I \neq I'$  et montrons qu'il y a une contradiction. Soit  $P(X) = aX^d + \dots + a_0 \in I \setminus I'$  de degré  $d$  minimal parmi les polynômes de  $I \setminus I'$ . On a  $a \in J_d$ . Supposons d'abord  $d \leq N$ . Alors  $J_d = J_N$ . Il existe donc  $c_{N,1}, \dots, c_{N,m_N} \in A$  tels que  $a = \sum_{1 \leq j \leq m_d} c_{N,j} a_{N,j}$ . Considérons

$$Q(X) := P(X) - \sum_{1 \leq j \leq m_N} c_{N,j} F_{N,j}(X) X^{d-N}.$$

Alors  $Q(X) \in I \setminus I'$ ,  $\deg Q(X) < d$ . Impossible.

Supposons maintenant  $d < N$ . Comme pour  $J_N$ , il existe  $c_{d,1}, \dots, c_{d,m_d}$  tels que  $a = \sum_{1 \leq j \leq m_d} c_{d,j} a_{d,j}$ . Considérons

$$Q(X) := P(X) - \sum_{1 \leq j \leq m_d} c_{d,j} F_{d,j}(X).$$

Alors  $Q(X) \in I \setminus I'$ ,  $\deg Q(X) \leq d-1$ . On a de nouveau une contradiction.  $\square$

## 1.2 Algèbres sur un anneau

**Définition 1.2.1** Soit  $A$  un anneau. Une  $A$ -algèbre est un anneau  $B$  muni d'un homomorphisme d'anneaux  $\phi : A \rightarrow B$ .

Les exemples typiques sont les sur-anneaux  $A \subseteq B$ , les anneaux quotients  $A \rightarrow B = A/I$ , les anneaux de polynômes à coefficients dans  $A$  (la structure d'algèbre est donnée par  $a \mapsto a$  polynôme constant), et les anneaux quotients de ces derniers.

Une extension de corps  $L/K$  correspond à une  $K$ -algèbre  $L$  qui est un corps, l'homomorphisme  $K \rightarrow L$  qui définit la structure étant l'inclusion.

Soient  $\phi : A \rightarrow B$  et  $\psi : A \rightarrow C$  des  $A$ -algèbres. Un *homomorphisme de  $A$ -algèbres*  $f : B \rightarrow C$  est un homomorphisme d'anneaux tel que  $f \circ \phi = \psi$ . Lorsque  $\phi, \psi$  sont des inclusions, cela veut dire que  $f|_A$  est égal à l'identité.

Soit  $\phi : A \rightarrow B$  une  $A$ -algèbre. On a alors naturellement une structure de  $A$ -module sur  $B$  en posant pour la multiplication externe  $a \star b = \phi(a)b$  pour tout  $a \in A$  et pour tout  $b \in B$ . Une  $A$ -algèbre *finie* est une  $A$ -algèbre qui est de type fini en tant que  $A$ -module (avec la structure décrite ci-avant). On dit que  $B$  est une  $A$ -algèbre *de type fini* si  $B$  est isomorphe, en tant que  $A$ -algèbre, à un quotient d'un anneau de polynômes  $A[T_1, \dots, T_n]$ .

Soit

$$F(T_1, \dots, T_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu T_1^{\nu_1} \dots T_n^{\nu_n} \in A[T_1, \dots, T_n].$$

Soient  $b_1, \dots, b_n \in B$ . On note

$$F(b_1, \dots, b_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \phi(a_\nu) b_1^{\nu_1} \dots b_n^{\nu_n} \in B.$$

C'est une "expression polynomiale" en les  $b_1, \dots, b_n$ . On note  $A[b_1, \dots, b_n]$  l'ensemble de ces expressions polynomiales quand  $F(T_1, \dots, T_n)$  parcourt l'ensemble  $A[T_1, \dots, T_n]$ . C'est une sous- $A$ -algèbre de  $B$ . Avec cette notation, on a  $B$  finie sur  $A$  s'il existe  $b_1, \dots, b_n \in B$  tels que

$$B = Ab_1 + \dots + Ab_n.$$

Tandis que  $B$  est de type fini sur  $A$  s'il existe  $b_1, \dots, b_n \in B$  tels que

$$B = A[b_1, \dots, b_n].$$

Ce qui est une condition plus faible qu'être finie.

**Exemple 1.2.2** Tout anneau admet une unique structure de  $\mathbb{Z}$ -algèbre.

**Corollaire 1.2.3.** *Si  $A$  est noethérien (par exemple si c'est un corps ou un anneau principal), alors toute  $A$ -algèbre de type fini est un anneau noethérien.*

**Exemple 1.2.4** L'anneau des polynômes  $A[T]$  est naturellement une  $A$ -algèbre, de type fini par définition, mais pas finie. En effet, si  $A[T]$  était engendré par  $P_1(T), \dots, P_n(T)$  en tant que  $A$ -module, alors tout élément de  $A[T]$  serait de la forme  $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i P_i(T)$  avec  $a_i \in A$ , et serait de degré  $\leq \max_i \{P_i(T)\}$ . Absurde.

**Exemple 1.2.5** Soit  $P(T) = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \dots + a_1T + a_0 \in A[T]$ . Alors  $B = A[T]/(P(T)A[T])$  est une  $A$ -algèbre finie. En effet en utilisant la division euclidienne par  $P(T)$  dans  $A[T]$ , ce qui est possible car  $P(T)$  est unitaire, on voit que  $B$  est engendré comme  $A$ -module par la famille  $\{1, t, \dots, t^{d-1}\}$  où  $t \in B$  est la classe de  $T$  modulo  $P(T)A[T]$ .

**Exercice 1.2.6** Soit  $F(T) = a_dT^d + a_{d-1}T^{d-1} + \dots + a_1T + a_0 \in A[T]$  un polynôme. Supposons que  $B = A[T]/(F(T)A[T])$  soit fini sur  $A$ . Notons  $t$  la classe de  $T$  dans l'anneau quotient  $B$ .

1. Montrer qu'il existe  $n > 0$  tel que  $\{1, t, \dots, t^{n-1}\}$  soit une famille génératrice de  $B$  comme  $A$ -module. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire  $P(T) \in A[T]$  de degré  $n$  tel que  $P(t) = 0$ .
2. Supposons de plus que  $A$  est intègre. Montrer que  $F(T)$  est unitaire.

Soit  $B$  une  $A$ -algèbre et soit  $M$  un  $B$ -module. Alors  $M$  a naturellement une structure de  $A$ -module. Le produit externe étant défini par  $a \times x = \phi(a)x$  si  $\phi : A \rightarrow B$  définit la structure de  $A$ -algèbre sur  $B$ .

**Proposition 1.2.7.** *(Transitivité) Soit  $B$  une  $A$ -algèbre finie et soit  $M$  un  $B$ -module de type fini. Alors  $M$ , en tant que  $A$ -module, est de type fini. En particulière, une algèbre finie sur  $B$  est une algèbre finie sur  $A$ .*

*Démonstration.* Soit  $M = \sum_{1 \leq i \leq n} Bx_i$  et  $B = \sum_{1 \leq j \leq m} Ab_j$ . Alors

$$M = \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} A(b_j x_i).$$

□

**Corollaire 1.2.8.** *Sous les hypothèses de la proposition, toute  $B$ -algèbre finie est aussi une  $A$ -algèbre finie.*

### 1.3 Modules sur un anneau principal

Rappelons qu'un anneau  $A$  est *principal* s'il est intègre, et si tout idéal de  $A$  est engendré par un élément. En général on convient implicitement que  $A$  n'est pas un corps. Exemples usuels :  $\mathbb{Z}$ ,  $K[x]$ ,  $\mathbb{Z}[i]$ . On en verra quelques autres. Mais parmi les anneaux d'entiers, il n'en existe pas beaucoup. Une façon de montrer qu'un anneau  $A$  est principal est de montrer qu'il est *euclidien*, c'est-à-dire qu'on a une division euclidienne sur l'anneau (c'est le cas des trois exemples précédents). Mais un anneau principal n'est pas nécessairement euclidien.

Les modules sur un anneau sont des généralisations des espaces vectoriels sur un corps. Mais contrairement aux espaces vectoriels, un module n'admet pas nécessairement une base. Par exemple  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  vu comme  $\mathbb{Z}$ -module est non nul, mais n'a aucune famille libre (tout vecteur  $x$  est "tué par 2" :  $2x = 0$ ). Cependant, sur un anneau principal, la structure des modules est particulièrement simple. Soit  $A$  un anneau principal. Soit  $M$  un  $A$ -module. L'ensemble

$$M_t = \cup_{a \in A, a \neq 0} \{x \in M \mid ax = 0\}$$

est un sous-module de  $M$ , appelé la *torsion* de  $M$ . Si  $A = \mathbb{Z}$ , cela correspond aux éléments d'ordre fini dans le groupe abélien  $M$ . On dit que  $M$  est *sans torsion* si  $M_t = \{0\}$ . Les deux théorèmes qui suivent ont été vus au semestre d'automne.

**Theorem 1.3.1.** *Supposons  $A$  principal. Soit  $M$  un module de type fini sur  $A$ . Alors  $M/M_t$  est libre de rang fini,  $M_t$  est de type fini, et  $M$  est isomorphe (non canoniquement) à la somme directe*

$$M \simeq (M/M_t) \oplus M_t.$$

*En particulier,  $M$  est libre si et seulement s'il est sans torsion sur  $A$ .*

**Theorem 1.3.2.** (Base adaptée) *Soit  $M$  un module libre de rang fini  $m$  sur  $A$ . Soit  $N$  un sous-module de  $M$ . Alors  $N$  est libre de rang  $n \leq m$ . De plus il existe une base  $\{e_1, \dots, e_s, \dots, e_m\}$  de  $M$  et des éléments  $a_1, \dots, a_n \in A$  non nuls tels que*

$$N = \oplus_{1 \leq i \leq n} a_i e_i A, \quad a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_n.$$

*La suite décroissante des idéaux  $a_1 A \supseteq \dots \supseteq a_n A$  est unique.*

**Remarque 1.3.3** Le théorème dit qu'un sous-module  $N \subseteq M$  possède toujours une base de la forme  $\{a_1e_1, \dots, a_me_m\}$  pour un choix convenable des  $e_i$ . En revanche il est faux en générale qu'une base de  $N$  se complète en une base de  $M$  de cette façon, même à homothétie près. Prenons par exemple  $M = \mathbb{Z}^3$  avec la base canonique  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ . Soit  $N$  le sous-module de  $M$  engendré par  $f_1 := \epsilon_1, f_2 := \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3$ . Ces derniers forment une base de  $N$ . Mais il n'existe pas de base  $e_1, e_2, e_3$  de  $M$  et des  $a_i \in \mathbb{Z}$  tels que  $f_1 = a_1e_1, f_2 = a_2e_2$ . C'est-à-dire qu'on ne peut pas imposer une base de  $N$  dans le théorème.

## 1.4 Rappel sur le lemme de Gauss dans les anneaux factoriels

On se donne un anneau factoriel  $A$ , de corps de fractions  $K$ .

**Proposition 1.4.1.** (Lemme de Gauss) *Soit  $A$  factoriel de corps des fractions  $K$ .*

(1) *Soient  $F, G \in A[X]$  non nuls. Alors*

$$\text{cont}(F(X)G(X)) = \text{cont}(F(X))\text{cont}(G(X))$$

(à association près).

(2) *Soit  $f(X) \in K[X]$  non nul. Alors  $\text{cont}(f(X)) \in K^*$  est défini à multiplication par une unité de  $A$  près, et  $\text{cont}(fg) = \text{cont}(f)\text{cont}(g)$ .*

(3) *Si  $f(X) \in K[X]$  est unitaire, alors*

$$\text{cont}(f(X)) \in A^{-1} := \{1/a \mid a \in A \setminus \{0\}\},$$

et on a  $\text{cont}(f(X)) = 1$  si et seulement si  $f(X) \in A[X]$ .

(4) *L'anneau  $A[X]$  est factoriel. Ses éléments irréductibles sont les irréductibles de  $A$  et les polynômes  $F(X) \in A[X]$  non constants irréductibles dans  $K[X]$  et de contenu 1.*

*Démonstration.* (3) Attention, le contenu d'un polynôme est défini à multiplication par un élément inversible de  $A$  près. On écrit

$$f(X) = X^n + \frac{a_{n-1}}{a}X^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a}X + \frac{a_0}{a}$$

avec  $a, a_i \in A$  et  $a \neq 0$ . Alors

$$\text{cont}(f) = \frac{\text{cont}(af)}{a} = \frac{\text{pgcd}\{a, a_{n-1}, \dots, a_0\}}{a}.$$

Donc  $1/\text{cont}(f) \in A$ . Si  $\text{cont}(f) = 1$ , alors  $\text{pgcd}\{a, a_{n-1}, \dots, a_0\} = a$ , donc  $a \mid a_i$  pour tout  $i$  et  $f(X) \in A[X]$ . □

## Chapitre 2

# Extensions entières

### 2.1 Éléments entiers

Soient  $A$  un anneau intègre, sous-anneau d'un anneau intègre  $B$ . On peut donc considérer  $B$  comme une  $A$ -algèbre.

**Définition 2.1.1** On dit qu'un élément  $b \in B$  est *entier sur  $A$*  s'il existe un polynôme **unitaire**  $P(X) \in A[X]$  tel que  $P(b) = 0$ . Autrement dit, s'il existe  $a_0, \dots, a_{d-1} \in A$  ( $d \geq 1$ ) tels que

$$b^d + a_{d-1}b^{d-1} + \dots + a_0 = 0.$$

L'équation ci-dessus définit une *relation entière* de  $b$  sur  $A$ . Tout élément de  $A$  est entier sur  $A$ . On dit que  $B$  est *entier sur  $A$*  si tous ses éléments sont entiers sur  $A$ . On dira aussi que  $B$  est une *extension entière de  $A$* .

**Exemple 2.1.2** Les éléments  $\sqrt{2}, i = \sqrt{-1}, \sqrt{2} + i, (\sqrt{5} + 1)/2$  sont entiers sur  $\mathbb{Z}$  : ce sont des zéros respectivement des polynômes

$$X^2 - 2, X^2 + 1, X^4 - 2X^2 + 9, X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}[X].$$

Par contre  $\sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$  n'est pas entier sur  $\mathbb{Z}$ . Cela se montre directement en considérant une relation entière éventuelle sur  $\mathbb{Z}$ . Voir aussi 2.1.4.

Lorsque  $A, B$  sont des corps, les éléments entiers sont les éléments algébriques. Mais lorsque  $A$  n'est pas un corps, il ne suffit pas que  $b$  soit zéro d'un polynôme non nul, car on ne peut pas rendre unitaire un polynôme non nul en divisant par le coefficient dominant.

Tout élément de  $B$  entier sur  $A$  est algébrique sur  $\text{Frac}(A)$ . Réciproquement, quels sont les éléments algébriques qui sont entiers sur  $A$  ?

**Proposition 2.1.3.** *Soit  $A$  un anneau factoriel de corps de fractions  $K$ . Soit  $L/K$  une extension de corps. Alors  $b \in L$  est entier sur  $A$  si et seulement si son polynôme minimal  $m(X)$  appartient à  $A[X]$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $b \in L$  soit entier sur  $A$ . Il existe un polynôme unitaire  $F(X) \in A[X]$  qui annule  $b$ . On a  $F(X) = m(X)g(X)$  pour un certain  $g(X) \in K[X]$  unitaire. Or  $\text{cont}(m(X)), \text{cont}(g(X)) \in A^{-1}$  et leur produit vaut 1, donc  $\text{cont}(m(X)) = 1$  et  $m(X) \in A[X]$  (proposition 1.4.1(3)).

La réciproque est immédiate.  $\square$

**Exemple 2.1.4** Le polynôme minimal de  $\sqrt{2}/2$  est  $X^2 - 1/4 \notin \mathbb{Z}[X]$ . Donc  $\sqrt{2}/2$  n'est pas entier sur  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 2.1.5** Trouver l'ensemble des éléments de  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  entiers sur  $\mathbb{Z}$ , où  $d \in \mathbb{Z}$  est sans facteur carré (c'est  $\mathbb{Z}[(\sqrt{d} + 1)/2]$  ou  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  selon que  $d \equiv 1 \pmod{4}$  ou non).

On sait que dans les extensions de corps, les éléments algébriques sont stables par addition et multiplication. Nous allons montrer la même propriété pour les éléments entiers (corollaire 2.1.9(2)).

**Lemme 2.1.6** (Cayley-Hamilton). *Soit  $M$  un module de type fini sur un anneau  $A$  et soit  $\phi$  un endomorphisme  $A$ -linéaire de  $M$ . Alors il existe un polynôme unitaire  $\chi(X) \in A[X]$  tel que  $\chi(\phi) \equiv 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $x_1, \dots, x_n$  une famille génératrice de  $M$ . Il existe une matrice  $N = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(A)$  telle que

$$\phi(x_i) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j, \quad \forall i \leq n.$$

Soit

$$C = \{P(\phi) \in \text{End}_A(M) \mid P(X) \in A[X]\}.$$

C'est un sous-anneau commutatif unitaire de  $\text{End}_A(M)$ , et les éléments de  $A$  s'envoient dedans comme des homothéties. On peut écrire les identités ci-dessus formellement comme

$$(\phi \cdot I_n - N) \cdot (x_1, \dots, x_n)^t = 0,$$

avec  $\phi \cdot I_n - N$  vue comme une matrice à coefficients dans  $C$ . Considérons sa comatrice  ${}^t \text{com}(\phi \cdot I_n - N)$  qui est également dans  $M_n(C)$ . On a alors

$${}^t \text{com}(\phi \cdot I_n - N) \cdot (\phi \cdot I_n - N) \cdot (x_1, \dots, x_n)^t = 0.$$

Or

$${}^t \text{com}(\phi \cdot I_n - N) \cdot (\phi \cdot I_n - N) = \det(\phi \cdot I_n - N) = \chi_N(\phi)$$

où  $\chi_N(X) \in A[X]$  est le polynôme caractéristique de la matrice  $N \in M_n(A)$ . Il suit que  $\chi_N(\phi) \equiv 0$  puisque cet endomorphisme envoie une famille génératrice de  $M$  sur le vecteur 0.  $\square$

**Proposition 2.1.7.** *Soient  $A \subseteq B$  des anneaux intègres. Soit  $b \in B$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $b$  est entier sur  $A$  ;
- (ii) La sous- $A$ -algèbre

$$A[b] := \{F(b) \mid F(X) \in A[X]\}$$

de  $B$  est finie sur  $A$  ;

- (iii) Il existe un sous- $A$ -module  $M \neq 0$  de  $B$  de type fini sur  $A$  et stable par la multiplication par  $b$ .

*Démonstration.* (i)  $\implies$  (ii). Soit  $P(X) \in A[X]$  un polynôme unitaire que annule  $b$ . Par division euclidienne par  $P(X)$ , on est ramené à ne considérer que les  $F(b)$  avec  $\deg F(X) \leq d := \deg P(X)$ . Donc  $A[b]$  est engendré par  $\{1, b, \dots, b^{d-1}\}$ .

(ii)  $\implies$  (iii). Prendre  $M = A[b]$ .

(iii)  $\implies$  (i). La multiplication par  $b$  induit un endomorphisme  $A$ -linéaire  $[b]$  du  $A$ -module  $M$ , et ce dernier est par hypothèse de type fini. Par Cayley-Hamilton 2.1.6, il existe un polynôme unitaire  $\chi(X) \in A[X]$  tel que  $\chi([b]) = 0$  comme endomorphisme de  $M$ . Or  $\chi([b])$  est la multiplication par  $\chi(b) \in B$ . Comme  $M \subseteq B$  et que ce dernier est un anneau intègre, on en déduit que  $\chi(b) = 0$  dans  $B$  et donc que  $b$  est entier sur  $A$ .  $\square$

**Corollaire 2.1.8.** Soit  $A \subseteq B$  comme avant. Si  $B$  est fini sur  $A$ , alors il est entier sur  $A$ .

*Démonstration.* Cela résulte de 2.1.7(iii) en prenant  $M = B$ .  $\square$

**Corollaire 2.1.9.** Soient  $A \subseteq B \subseteq C$  des anneaux intègres.

- (1) Soient  $b_1, \dots, b_n \in B$  entiers sur  $A$ . Alors

$$A[b_1, \dots, b_n] := \{F(b_1, \dots, b_n) \mid F(X_1, \dots, X_n) \in A[X_1, \dots, X_n]\}$$

est fini (donc entier) sur  $A$ .

- (2) L'ensemble  $B_0$  des éléments de  $B$  entiers sur  $A$  forment une sous- $A$ -algèbre entière de  $B$ .
- (3) (Transitivité) Supposons  $C$  entier sur  $B$  et  $B$  entier sur  $A$ . Alors  $C$  est entier sur  $A$ .

*Démonstration.* (1) On a  $A[b_1]$  fini sur  $A$ . Comme  $b_n$  est entier sur  $A$  donc entier sur  $A[b_1, \dots, b_{n-1}]$ , on a  $A[b_1, \dots, b_n]$  fini sur  $A[b_1, \dots, b_{n-1}]$ . On conclut par récurrence sur  $n$  en utilisant le corollaire 1.2.8.

(2) Résulte de (1). En effet il est clair que  $A \subseteq B_0$ . Si  $b_1, b_2 \in B$ , alors  $b_1 + b_2, b_1 b_2 \in A[b_1, b_2]$  sont entiers sur  $A$ , donc appartiennent à  $B_0$ .

(3) Si  $c \in C$  est entier sur  $B$ , on a une relation entière

$$c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \dots + b_0 = 0, \quad b_i \in B.$$

Alors  $c$  est entier sur  $A[b_0, \dots, b_{n-1}]$ , donc  $A[b_0, \dots, b_{n-1}, c]$  est fini sur  $A$  et  $c$  est entier sur  $A$ .  $\square$

**Exemple 2.1.10** Les nombres  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  sont évidemment entiers sur  $\mathbb{Z}$ . Mais  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  aussi, ce qui est moins évident *a priori*.

**Exercice 2.1.11** Une preuve plus directe de 2.1.9. Soit  $b \in B$  ( $B$  intègre) entier sur  $A$ . Soit  $P(X) \in A[X]$  un polynôme unitaire qui s'annule en  $b$ .

1. Soient  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Omega$  les racines de  $P(X)$  dans une clôture algébrique  $\Omega$  de  $K = \text{Frac}(A)$ . Alors  $s_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, s_n(\beta_1, \dots, \beta_n)$ , où les  $s_1, \dots, s_n$  sont les polynômes symétriques élémentaires, appartiennent à  $A$ .
2. En déduire que pour tout  $F(X_1, \dots, X_n) \in A[X_1, \dots, X_n]$  symétrique,  $F(\beta_1, \dots, \beta_n) \in A$ .
3. Soit  $H(X_1, \dots, X_n) \in A[X_1, \dots, X_n]$  et considérons

$$f(T) = \prod_{\sigma \in S_n} (T - H(\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(n)})) \in \Omega[T].$$

Montrer que les coefficients de  $f(T)$  sont de polynômes symétriques en les  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . En déduire que  $f(T) \in A[T]$  et que  $H(\beta_1, \dots, \beta_n)$  est entier sur  $A$ .

**Définition 2.1.12** Soient  $K$  le corps des fractions de  $A$ ,  $L/K$  une extension de corps. On appelle *clôture intégrale de  $A$  dans  $L$*  l'ensemble des éléments de  $L$  entiers sur  $A$ . C'est un sous-anneau de  $L$  contenant  $A$  et entier sur  $A$ .

**Définition 2.1.13** Soit  $L$  un corps de nombres (extension finie de  $\mathbb{Q}$ ). La clôture intégrale de  $\mathbb{Z}$  dans  $L$  est appelée *l'anneau des entiers de  $L$*  et notée, dans ce cours,  $\mathcal{O}_L$ .

- Exemple 2.1.14**
1. L'anneau des entiers de  $\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}$  lui-même. En effet si  $r \in \mathbb{Q}$  est entier sur  $\mathbb{Z}$ , comme son polynôme minimal sur  $\mathbb{Q}$  est  $X - r$ , on a  $r \in \mathbb{Z}$  par la proposition 2.1.3.
  2. Soit  $L = \mathbb{Q}[i]$  avec  $i^2 = -1$ . Si  $x + yi \in \mathbb{Q}[i]$  est entier sur  $\mathbb{Z}$ , son polynôme minimal  $X^2 - 2xX + (x^2 + y^2)$  doit appartenir à  $\mathbb{Z}[X]$ . Donc  $x$  et par suite  $y$  appartiennent à  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . On écrit  $x = k/2, y = \ell/2$  avec  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ . Alors  $k^2 + \ell^2 \in 4\mathbb{Z}$ . Cela implique que l'un des  $k, \ell$  est pair, et aussi que l'autre est pair, donc  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Inversement  $\mathbb{Z}[i]$  est fini sur  $\mathbb{Z}$  donc ses éléments sont entiers sur  $\mathbb{Z}$ . On voit ainsi que  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[i]$  l'anneau des entiers de Gauss.

**Définition 2.1.15** On dit qu'un anneau intègre  $A$  est *intégralement clos* si sa clôture intégrale dans  $\text{Frac}(A)$  est égale à  $A$  lui-même.

**Exemple 2.1.16** L'anneau  $A := \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  n'est pas intégralement clos. En effet,  $(1 + \sqrt{5})/2 \in \text{Frac}(A)$  est entier sur  $\mathbb{Z}$ , donc entier sur  $A$ , mais il n'appartient pas à  $A$ .

**Proposition 2.1.17.** *Soit  $L$  une extension de  $\text{Frac}(A)$ . Alors la clôture intégrale de  $A$  dans  $L$  est un anneau intégralement clos. En particulier, les anneaux d'entiers algébriques  $\mathcal{O}_L$  sont des anneaux intégralement clos.*

*Démonstration.* Soit  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $L$ . Soit  $c \in \text{Frac}(B) \subseteq L$  entier sur  $B$ . Alors  $c$  est entier sur  $A$  d'après 2.1.9(3). Donc  $c \in B$ .  $\square$

**Proposition 2.1.18.** *Tout anneau factoriel (en particulier tout anneau principal) est intégralement clos.*

*Démonstration.* Soit  $x \in K$  un élément entier sur  $A$  et non nul. On écrit  $x = u/v$  avec  $u, v$  premiers entre eux. Soit une relation entière

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_i \in A.$$

Alors

$$u^n + a_{n-1}v(u^{n-1} + \cdots + a_0v^{n-1}) = 0.$$

Si  $p$  est un diviseur premier de  $v$ , alors  $p \mid u^n$ , donc  $p \mid u$ . Ce qui est contraire à l'hypothèse  $u, v$  premiers entre eux. Il suit que  $v$  n'a pas de diviseur premier et donc  $v \in A^*$ . D'où  $x \in A$ .  $\square$

**Remarque 2.1.19** Il existe des anneaux intégralement clos qui ne sont pas factoriels. C'est le cas par exemple de l'anneau  $\mathbb{Q}[x, y, z]/(xy - z^2)$ . Un anneau des entiers d'un corps de nombres  $\mathcal{O}_L$  n'est presque jamais factoriel. On peut montrer qu'il est factoriel si et seulement s'il est principal. Ce qui est rarement vrai. On y reviendra avec les anneaux de Dedekind.

## 2.2 Norme, trace, discriminant

Dans ce paragraphe nous allons associer des invariants à des éléments entiers et aux extensions entières libres. Le but est de définir des invariants des corps de nombres qui permettent de les classifier.

### 2.2.1 Compléments d'algèbre linéaire

Soient  $K$  un corps,  $M = (a_{ij}) \in M_n(K)$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$ . On définit

$$\text{Tr}(M) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii}, \quad \det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

où  $S_n$  désigne le groupe symétrique de  $n$  éléments. Une fois le déterminant défini, on peut définir la comatrice on a

$$M \cdot {}^t \text{com}(M) = {}^t \text{com}(M) \cdot M = \det(M) I_n.$$

Soit  $A$  un anneau, on définit la trace, le déterminant, la comatrice d'une matrice  $M \in M_n(A)$  formellement comme sur un corps. On obtient respectivement  $\text{Tr}(M)$ ,  $\det M \in A$  et  $\text{com}(M) \in M_n(A)$ .

Soit  $\phi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux. Alors on obtient un homomorphisme d'anneaux (non-commutatifs)  $\tilde{\phi} : M_n(A) \rightarrow M_n(B)$  en envoyant  $(a_{ij})$  sur  $(\phi(a_{ij}))$ .

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $A$  un anneau intègre. Soient  $M, N \in M_n(A)$ .*

- (1) (Fonctorialité) *Si  $f : A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'anneaux, alors  $\phi(\text{Tr}(M)) = \text{Tr}(\tilde{\phi}(M))$  et  $\phi(\det(M)) = \det(\tilde{\phi}(M))$ .*
- (2) *Pour tous  $a \in A$ ,  $M, N \in M_n(A)$ ,*

$$\text{Tr}(aM + N) = a\text{Tr}(M) + \text{Tr}(N), \quad \det(MN) = \det(M) \det(N).$$

- (3) *Une matrice  $U \in M_n(A)$  est inversible si et seulement si  $\det(U) \in A^*$ .*
- (4) *Si  $U \in M_n(A)$  est inversible, alors*

$$\det(UMU^{-1}) = \det M, \quad \text{Tr}(UMU^{-1}) = \text{Tr}(M).$$

*Démonstration.* (1) est une vérification directe. Pour (2) et (4) on se ramène au cas des corps. (3) utiliser la comatrice.  $\square$

**Corollaire 2.2.2.** *Si  $M$  est un module libre de rang fini sur  $A$ , alors  $\text{Tr}$  et  $\det$  sont définis pour les endomorphismes linéaires de  $M$ .*

**Définition 2.2.3** Soient  $A \subseteq B$  des anneaux intègres avec  $B$  libre de rang  $n \geq 1$  sur  $A$ . Pour tout  $b \in B$ , la multiplication par  $b$  sur  $B$ , notée  $[b]$  est un endomorphisme linéaire de  $B$ . On définit  $\text{Tr}_{B/A}(b)$  et  $N_{B/A}(b)$  comme étant  $\text{Tr}([b])$  et  $\det([b])$  respectivement. Il faut noter que la définition dépend de  $B/A$ .

**Lemme 2.2.4.** *Soient  $A, B$  comme ci-dessus. Alors  $\text{Tr}_{B/A} : B \rightarrow A$  est  $A$ -linéaire et  $N_{B/A} : B \rightarrow A$  est multiplicatif. De plus  $N_{B/A}(ab) = a^n N_{B/A}(b)$  si  $a \in A$  et  $b \in B$ .*

**Exemple 2.2.5** 1.  $\text{Tr}_{B/A}(a) = na, N_{B/A}(a) = a^n$  pour tout  $a \in A$ .

2. Si  $A = \mathbb{Z}$  et  $B = \mathbb{Z}[i]$ . Pour tous  $z = x + yi \in \mathbb{Z}[i]$ , on a  $\text{Tr}_{B/A}(z) = 2x = z + \bar{z}$  et  $N_{B/A}(z) = x^2 + y^2 = z\bar{z}$  (on utilise la base  $\{1, i\}$  de  $B$  sur  $A$ ).

### 2.2.2 Interlude sur les polynômes symétriques

Soient  $K$  un corps et  $n \geq 1$ . Un polynôme  $P(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$  est dit *symétrique* s'il est invariant par permutation des variables :

$$P(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)}) = P(X_1, \dots, X_n), \quad \text{pour tout } \tau \in S_n$$

(groupe symétrique). Par exemples, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , les polynômes

$$s_i(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq n} X_{j_1} \dots X_{j_i}$$

sont symétriques et appelés les polynômes symétriques élémentaires.

**Théorème 2.2.6.** *L'ensemble des polynômes symétriques dans  $K[X_1, \dots, X_n]$  est égal à la sous- $K$ -algèbre  $K[s_1(X_1, \dots, X_n), \dots, s_n(X_1, \dots, X_n)]$ . Autrement dit, tout polynôme symétrique est une combinaison  $K$ -linéaire de produits de polynômes symétriques élémentaires.*

Sur un corps de caractéristique nulle, l'anneau des polynômes symétrique est également engendré par les polynômes de Newton  $\sum_{1 \leq k \leq n} T_k^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Proposition 2.2.7.** *Dans  $K[X_1, \dots, X_n][Y]$ , on a*

$$\prod_{1 \leq i \leq n} (Y - X_i) = Y^n - s_1 Y^{n-1} + \dots + (-1)^k s_k Y^{n-k} + (-1)^n s_n$$

(où il faut comprendre  $s_i(X_1, \dots, X_n)$  pour  $s_i$ .)

Le corollaire suivant est l'énoncé essentiel à retenir de ce petit paragraphe sur les polynômes symétriques.

**Corollaire 2.2.8** (Relations entre racines et coefficients). *Soit*

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in K[X].$$

*Soient  $x_1, \dots, x_n$  les racines de  $P(X)$  dans une clôture algébrique de  $K$ , comptées avec multiplicité. Alors*

$$s_i(x_1, \dots, x_n) = (-1)^i a_{n-i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

*En particulier,  $x_1 + \dots + x_n = -a_{n-1}$  et  $x_1 \dots x_n = (-1)^n a_0$ .*

### 2.2.3 Le cas des extensions finies de corps

Dans ce sous-paragraphe et le suivant, nous allons donner des formules aussi simples que possibles pour le calcul de la trace et de la norme.

**Proposition 2.2.9.** *Soient  $L/K$  une extension finie,  $x \in L$  et*

$$m_x(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$$

*son polynôme minimal. Alors*

(1)

$$\mathrm{Tr}_{K[x]/K}(x) = -a_{n-1}, \quad \mathrm{N}_{K[x]/K}(x) = (-1)^n a_0.$$

(2)

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = [L : K[x]] \mathrm{Tr}_{K[x]/K}(x), \quad \mathrm{N}_{L/K}(x) = \mathrm{N}_{K[x]/K}(x)^{[L:K[x]]}.$$

*Démonstration.* (1) La matrice de l'application  $K$ -linéaire  $K[x] \rightarrow K[x]$  multiplication par  $x$ , dans la base  $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ , est la matrice compagnon de  $m_x(X)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Cela permet de conclure que  $\mathrm{Tr}_{K[x]/K}(x) = \mathrm{Tr}(M) = -a_{n-1}$ ,  $\mathrm{N}_{K[x]/K}(x) = \det(M) = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0$ .

(2) Soit  $e_1, \dots, e_m$  une base de  $L/K[x]$ . Comme  $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$  est une base de  $K[x]/K$ , on obtient une base

$$\{e_1, xe_1, \dots, x^{n-1}e_1\} \cup \{e_2, xe_2, \dots, x^{n-1}e_2\} \cup \dots \cup \{e_m, xe_m, \dots, x^{n-1}e_m\}$$

de  $L/K$ . La matrice dans cette base de la multiplication par  $x$  dans  $L$  est la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & M \end{pmatrix}$$

Cela implique immédiatement (2). □

**Remarque 2.2.10** (Transitivité des traces et normes) La proposition 2.2.9 est un cas particulier du résultat suivant. Soient  $L/F$ ,  $F/K$  des extensions finies de corps. Soit  $x \in L$ , alors on a

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \mathrm{Tr}_{F/K}(\mathrm{Tr}_{L/F}(x)), \quad \mathrm{N}_{L/K}(x) = \mathrm{N}_{F/K}(\mathrm{N}_{L/F}(x)).$$

L'égalité sur les traces se démontre relativement aisément. Pour la norme, c'est une autre paire de manches. Voir Bourbaki : Algèbre 1, III, §9, n°4, Prop 6.

**Définition 2.2.11** Soit  $x \in L$  algébrique sur  $K$ . On fixe une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . Un *conjugué de  $x$*  dans  $\bar{K}$  est une racine dans  $\bar{K}$  du polynôme minimal  $m_x(X) \in K[X]$ . Un élément  $y \in \bar{K}$  est un conjugué de  $x$  si et seulement s'il existe  $K[x] \rightarrow \bar{K}$  qui envoie  $x$  sur  $y$ .

**Corollaire 2.2.12.** Soient  $x_1, \dots, x_n$  les conjugués de  $x$  dans  $\bar{K}$  (comptés avec multiplicité). Alors

$$\mathrm{Tr}_{K[x]/K}(x) = x_1 + \dots + x_n, \quad \mathrm{N}_{K[x]/K}(x) = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Cela résulte de la proposition 2.2.9 et des relations entre les racines et les coefficients de  $m_x(X)$  (2.2.8).

**Exemple 2.2.13** Soit  $K = \mathbb{Q}$ ,  $p \geq 3$  premier et  $L = \mathbb{Q}[\zeta_p]$  un corps cyclotomique, où  $\zeta_p \in \mathbb{C}$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité. Le polynôme minimal de  $\zeta_p$  sur  $\mathbb{Q}$  est

$$(X^p - 1)/(X - 1) = X^{p-1} + \dots + X + 1.$$

Ce dernier est aussi le polynôme minimal de  $\zeta_p^\ell$  pour tous  $1 \leq \ell \leq p-1$ . Donc  $\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\zeta_p^\ell) = -1$ . L'extension  $L/\mathbb{Q}$  est de degré  $\phi(p) = p-1$  avec une base  $1, \zeta, \dots, \zeta^{p-2}$ . D'où une formule générale pour tous les éléments de  $L$  :

$$\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}\left(\sum_{0 \leq \ell \leq p-2} a_\ell \zeta_p^\ell\right) = (p-1)a_0 - \sum_{1 \leq \ell \leq p-2} a_\ell.$$

Contrairement à la trace, la norme est en général moins aisée à calculer. Traitons un cas simple. Soit  $a \in \mathbb{Q}$ . Le polynôme minimal de  $\zeta_p + a$  est  $\Phi_p(X-a)$ . Donc  $\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}(\zeta_p + a) = (-1)^{p-1} \Phi_p(0-a) = \Phi_p(-a)$ . En particulier  $\mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}(\zeta_p - 1) = p$ .

Grâce à la notion de conjugués, nous pouvons donner une généralisation de la proposition 2.1.3 :

**Proposition 2.2.14.** Soit  $A$  un anneau intégralement clos de corps de fractions  $K = \mathrm{Frac}(A)$ . Soient  $L/K$  une extension algébrique et  $b \in L$  de polynôme minimal  $m_b(X) \in K[X]$ . Alors  $b$  est entier sur  $A$  si et seulement si  $m_b(X) \in A[X]$ .

*Démonstration.* Supposons  $b$  entier sur  $A$ . Soient  $b_1, \dots, b_n$  les racines de  $m_b(X)$  dans une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . Pour tout  $i \leq n$ , par l'unicité du corps de rupture, il existe un  $K$ -isomorphisme  $\sigma_i : K[b] \rightarrow K[b_i]$  qui envoie  $b_i$  sur  $b$ . Cet isomorphisme transforme une relation entière de  $b$  sur  $A$  en une relation entière de  $b_i$  sur  $A$ . Donc  $b_i$  est aussi entier sur  $A$ . Les coefficients de  $m_b(X)$  sont de polynômes symétriques élémentaires en les  $b_i$  (au signe près). Il suit de 2.1.9(2) que ces coefficients, qui sont dans  $K$ , sont entiers sur  $A$ , donc appartiennent à  $A$  par l'hypothèse  $A$  intégralement clos.  $\square$

### 2.2.4 Le cas des extensions séparables

On fixe un corps  $K$  et une clôture algébrique  $\bar{K}$ . Rappelons qu'un élément algébrique  $x \in L$  est *séparable* sur  $K$  si son polynôme minimal est séparable (i.e. sans racine multiple dans  $\bar{K}$ ). Une extension finie est dite séparable si tous ses éléments sont séparables. On sait que  $x$  séparable implique que  $K[x]$  séparable. Sur un corps de caractéristique nulle, toute extension algébrique est séparable. Si  $L/F$  et  $F/K$  sont des extensions finies, alors  $L/K$  est séparable si et seulement si  $L/F$  et  $F/K$  sont séparables.

Soit  $L/K$  une extension finie. Les  $K$ -isomorphismes de  $L$  dans  $\bar{K}$  s'appellent les *plongements de  $L$  dans  $\bar{K}$* . On note  $\text{Isom}_K(L, \bar{K})$  l'ensemble de ces plongements. Rappelons aussi :

**Theorem 2.2.15.** *Soit  $L/K$  une extension finie.*

(1) *Si  $F/L$  est une extension finie, alors la restriction*

$$\text{Isom}_K(F, \bar{K}) \rightarrow \text{Isom}_K(L, \bar{K})$$

*est une application surjective. Autrement dit, tout  $\tau \in \text{Isom}_K(L, \bar{K})$  s'étend (ou se relève) en un  $\sigma \in \text{Isom}_K(F, \bar{K})$ .*

(2) *Supposons de plus que  $L/K$  est séparable de degré  $n$ .*

(a) *(Théorème de l'élément primitif) Il existe  $\theta \in L$  tel que  $L = K[\theta]$ .*

(b) *Il existe exactement  $n$  plongements de  $L$  dans  $\bar{K}$ , et on a une bijection*

$$\text{Isom}_K(L, \bar{K}) \rightarrow \{\theta_1, \dots, \theta_n\}, \quad \tau \mapsto \tau(\theta)$$

*avec l'ensemble  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des conjugués de  $\theta$  dans  $\bar{K}$ .*

**Lemme 2.2.16.** *Soient  $F/K$  une extension finie galoisienne et  $L/K$  une sous-extension. Considérons la restriction*

$$r : \text{Gal}(F/K) = \text{Isom}_K(F, \bar{K}) \rightarrow \text{Isom}_K(L, \bar{K}).$$

*Alors pour tout  $\tau \in \text{Isom}_K(L, \bar{K})$ ,  $r^{-1}(\tau)$  est de cardinal  $[F : L]$ .*

*Démonstration.* On sait que  $r$  est surjective par 2.2.15(1). Si  $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Gal}(F/K)$ , on a  $r(\sigma_1) = r(\sigma_2)$  si et seulement si  $(\sigma_1^{-1}\sigma_2)|_L = \text{Id}_L$ , ou de façon équivalente,  $\sigma_1^{-1}\sigma_2 \in \text{Gal}(F/L)$ . Il suit que  $r^{-1}(\tau)$  est en bijection avec  $\text{Gal}(F/L)$  qui a  $[F : L]$  éléments.  $\square$

**Theorem 2.2.17.** *Soit  $L/K$  une extension séparable de degré  $n$ . Alors pour tout  $x \in L$ , on a*

$$\text{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{\tau \in \text{Isom}_K(L, \bar{K})} \tau(x), \quad \text{N}_{L/K}(x) = \prod_{\tau \in \text{Isom}_K(L, \bar{K})} \tau(x).$$

*Démonstration.* Supposons d'abord  $L/K$  galoisienne. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} \sigma(x) &= \sum_{\tau \in \text{Isom}_K(K[x], \bar{K})} \left( \sum_{\sigma|_{K[x]} = \tau} \sigma(x) \right) = \\ &= \sum_{\tau \in \text{Isom}_K(K[x], \bar{K})} [L : K[x]] \tau(x) = [L : K[x]] \text{Tr}_{K[x]/K}(x) = \text{Tr}_{L/K}(x) \end{aligned}$$

d'après 2.2.16, 2.2.12 et 2.2.9(2).

Dans le cas général, on considère la clôture galoisienne  $F/K$  de  $L/K$ . Soit  $x \in L$ . Alors

$$\sum_{\sigma \in \text{Gal}(F/K)} \sigma(x) = [F : L] \sum_{\tau \in \text{Isom}_K(L, \bar{K})} \tau(x)$$

en utilisant 2.2.16. De plus, d'après le cas galoisien, on a

$$\sum_{\sigma \in \text{Gal}(F/K)} \sigma(x) = \text{Tr}_{F/K}(x) = [F : K[x]] \text{Tr}_{K[x]/K}(x)$$

et, par (2.2.9(2)),

$$\text{Tr}_{L/K}(x) = [L : K[x]] \text{Tr}_{K[x]/K}(x).$$

Il suit que

$$\text{Tr}_{L/K}(x) = \text{Tr}_{F/K}(x) / [F : L] = \sum_{\tau \in \text{Isom}_K(L, \bar{K})} \tau(x).$$

L'égalité sur la norme se montre de la même façon.  $\square$

### 2.2.5 Discriminant

On fixe un corps  $K$ . Soit

$$\varphi : V \times V \rightarrow K$$

une forme bilinéaire symétrique sur un  $K$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Pour toute base  $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$ , on définit le discriminant

$$\text{disc}(\varphi, \varepsilon) = \det(\text{Mat}(\varphi, \varepsilon)) := \det(\varphi(e_i, e_j)) \in K.$$

On a  $\varphi$  non-dégénérée si et seulement si  $\text{disc}(\varphi, \varepsilon) \neq 0$ . Si  $\varepsilon'$  est une famille de  $n$  vecteurs dans  $V$ , on a une matrice de passage  $U$  qui décrit les coordonnées de  $\varepsilon'$  dans la base  $\varepsilon$ . Alors

$$\text{Mat}(\varphi, \varepsilon') = U \cdot \text{Mat}(\varphi, \varepsilon) \cdot {}^t U.$$

Par conséquent,

$$\text{disc}(\varphi, \varepsilon') = \det(U)^2 \text{disc}(\varphi, \varepsilon). \quad (2.1)$$

Supposons que  $\varphi$  soit non-dégénérée, donc  $\text{disc}(\varphi, \varepsilon) \in K^*$ . De l'égalité ci-dessus on déduit alors deux informations.

- (1) La famille  $\varepsilon'$  est une base si et seulement si  $\det(\varphi(e'_i, e'_j)) \in K^*$  ;
- (2) si c'est le cas, alors  $\text{disc}(\varphi, \varepsilon')$  diffère de  $\text{disc}(\varphi, \varepsilon)$  par un facteur multiplicatif qui est un carré de  $K^*$ . En particulier, si  $K \subseteq \mathbb{R}$ , alors le signe de  $\text{disc}(\varphi, \varepsilon)$  est indépendant du choix de la base.

Nous allons maintenant considérer une forme bilinéaire très concrète. Soit  $L/K$  une extension finie. On a une forme bilinéaire symétrique canonique

$$\text{Tr}_{L/K} : L \times L \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto \text{Tr}_{L/K}(xy).$$

**Remarque 2.2.18** La forme bilinéaire  $\text{Tr}_{L/K}(\cdot, \cdot)$  induit une application  $K$ -linéaire  $L \rightarrow L^\vee$  (le dual comme  $K$ -espace vectoriel), définie par  $x \mapsto \text{Tr}_{L/K}(x, \cdot)$ . La forme est non-dégénérée si et seulement si  $L \rightarrow L^\vee$  est injective. Soit  $x \in L$  non nul. Alors  $x$  appartient au noyau de  $L \rightarrow L^\vee$  si et seulement si et seulement si  $\text{Tr}_{L/K}(xy) = 0$  pour tout  $y \in L$ . Ce qui revient à  $\text{Tr}_{L/K}(z) = 0$  pour tout  $z \in L$ . Donc si  $\text{car}(K) = 0$  ou si  $\text{car}(K) = p > 0$  est premier à  $[L : K]$ , alors comme  $\text{Tr}_{L/K}(1) = [L : K]1_K \neq 0 \in K$ , la forme bilinéaire trace est non-dégénérée. Une telle extension est toujours séparée. On admet que la forme bilinéaire symétrique ci-dessus est non-dégénérée si et seulement si  $L/K$  est séparée. Nous allons voir plus bas (théorème 2.2.22 (2)) c'est une condition suffisante. La nécessité n'est pas difficile à montrer, mais nous n'allons pas nous attarder sur les extensions inséparables.

**Exercice 2.2.19** Soit  $L/K$  une extension finie inséparable. Soit  $p$  la caractéristique de  $K$ , nécessairement positive.

1. Montrer que  $p \mid [L : K]$ .
2. Soit  $x \in L$  un élément séparable sur  $K$ . Montrer que  $p \mid [L : K[x]]$ . En déduire que  $\text{Tr}_{L/K}(x) = 0$ .
3. Soit  $x \in L$  un élément inséparable sur  $K$ . Montrer que  $\text{Irr}(x, K, X) \in K[X^p]$ . En déduire que  $\text{Tr}_{L/K}(x) = 0$ .

**Définition 2.2.20** Soit  $L/K$  une extension finie. Pour toute base (vectorielle)  $\varepsilon$  de  $L/K$ , on pose

$$D_{L/K}(\varepsilon) = \text{disc}(\text{Tr}_{L/K}, \varepsilon) \in K.$$

C'est le *discriminant* de  $L/K$  relatif à la base  $\varepsilon$ .

Nous allons maintenant donner une expression « explicite » du discriminant. Pour cela nous avons besoin préalablement d'un résultat d'indépendance linéaire. Soit  $L/K$  une extension finie de corps. L'ensemble  $\text{App}(L, \bar{K})$  des applications de  $L$  vers  $\bar{K}$  est naturellement un espace vectoriel sur  $\bar{K}$  : si  $f, g$  sont deux telles applications et  $\lambda, \mu \in K$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est l'application définie par  $x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$ .

**Lemme 2.2.21.** (Dedekind) *Soit  $L/K$  une extension finie. Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \text{Isom}_K(L, \bar{K})$  deux à deux distincts. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des éléments de  $\bar{K}$  tels que*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \sigma_i(x) = 0, \quad \forall x \in L.$$

*Alors  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \leq n$ . Autrement dit, la famille des  $\sigma_i$  est libre dans  $\text{App}(L, \bar{K})$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Supposons le contraire. On peut donc trouver un entier  $m \geq 1$  tel qu'il existe des  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  dans  $\bar{K}$ , tous non nuls, avec  $\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \sigma_i = 0$  dans  $\text{App}(L, \bar{K})$ . On peut de plus choisir  $m$  minimal pour cette propriété. Fixons un  $y_0 \in L$  tel que  $\sigma_1(y_0) \neq \sigma_2(y_0)$ . Pour tout  $x \in L$ , on a

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \sigma_1(y_0) \sigma_i(x) = 0, \quad \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \sigma_i(y_0) \sigma_i(x) = 0$$

(car  $\sigma_i$  est un homomorphisme d'anneaux). Donc

$$\sum_{2 \leq i \leq m} \lambda_i (\sigma_1(y_0) - \sigma_i(y_0)) \sigma_i(x) = 0.$$

Cela contredit l'hypothèse de minimalité sur  $m$ . □

**Theorem 2.2.22.** *Soit  $L/K$  une extension finie séparable. Soit  $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $L$  en tant que  $K$ -espace vectoriel et notons  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  les éléments de  $\text{Isom}_K(L, \bar{K})^1$ . On a*

<sup>1</sup>Ici on utilise l'hypothèse  $L/K$  séparable, voir théorème 2.2.15 (2.b).

- (1)  $D_{L/K}(\varepsilon) = (\det(\sigma_i(\varepsilon_j))_{i,j})^2$  et  
 (2)  $D_{L/K}(\varepsilon) \neq 0$ . Autrement dit, la forme trace  $\text{Tr}_{L/K}$  est non-dégénérée.

*Démonstration.* (1) Soit  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  les plongements de  $L$  dans  $\bar{K}$ . On a

$$\text{Tr}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sum_{1 \leq k \leq n} \sigma_k(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sum_{1 \leq k \leq n} \sigma_k(\varepsilon_i) \sigma_k(\varepsilon_j).$$

Si  $M = (\sigma_k(\varepsilon_i))_{k,i} \in M_{n \times n}(\bar{K})$ , alors  $(\text{Tr}(\varepsilon_i \varepsilon_j))_{i,j} = M^t M$ . Ce qui implique (1).

(2) (Voir aussi la remarque 2.2.25 ci-dessous). Si  $D_{L/K} = 0$ , alors les vecteurs ligne de la matrice  $M$  ci-dessus sont liées. Comme  $\varepsilon$  est une base de  $L/K$ , il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \bar{K}$ , non tous nuls, tels que  $\sum_{i \leq n} \lambda_i \sigma_i = 0$ . Ce qui contredit le lemme de Dedekind ci-dessus.  $\square$

**Remarque 2.2.23** En général  $\det(\sigma_i(\varepsilon_j))_{i,j} \notin K$  même si son carré appartient à  $K^*$ .

**Corollaire 2.2.24.** Soit  $L/K$  une extension séparable de degré  $n$ . Considérons une famille  $x_1, \dots, x_n \in L$ . Alors  $\det(\text{Tr}(x_i x_j))_{i,j} \neq 0$  si et seulement si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est une base de  $L/K$ .

**Remarque 2.2.25** Nous avons donné en cours une preuve différente pour la propriété (2) du théorème 2.2.22. Elle n'utilise pas le lemme de Dedekind et est plus naturelle. La voici. Pour montrer la non nullité de  $D_{L/K}$  pour une base quelconque, il suffit de le faire pour une base particulière (cela résulte de l'égalité (2.1) au début du paragraphe). Soit  $\theta \in L$  un élément primitif, de sorte que  $\Theta := \{1, \theta, \dots, \theta^{n-1}\}$  soit une base de  $L$  comme  $K$ -espace vectoriel. Alors d'après (1), on a

$$D_{L/K}(\Theta) = (\det M)^2, \quad M = (\sigma_i(\theta^{j-1}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Ici  $M$  est une matrice de Vandermonde et

$$\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)).$$

Posons  $\theta_i = \sigma_i(\theta)$ . Alors  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  est l'ensemble des racines de  $\text{Irr}(\theta, K, X)$ , deux à deux distinctes car  $\theta$  est séparable sur  $K$ . D'où

$$D_{L/K}(\Theta) = \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\theta_i - \theta_j) \right)^2 \neq 0. \quad (2.2)$$

Notons que si  $n = 2$ , alors  $\text{Irr}(\theta, K, X) = X^2 + aX + b$ . On a alors

$$D_{L/K}(\Theta) = (\theta_1 - \theta_2)^2 = (\theta_1 + \theta_2)^2 - 4\theta_1\theta_2 = (-a)^2 - 4b = a^2 - 4b.$$

On retrouve le bon vieux discriminant d'un polynôme unitaire de degré 2!

Nous allons généraliser le calcul ci-dessus aux degrés  $n \geq 3$ .

**Définition 2.2.26** Soit  $P(X) \in K[X]$  un polynôme unitaire de degré  $n \geq 2$ , non nécessairement irréductible. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ses racines dans une clôture algébrique de  $K$  (comptées avec leurs multiplicités). Alors le *discriminant* de  $P(X)$  est par définition

$$\text{disc}(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

C'est une fonction symétrique des racines de  $P(X)$ , donc  $\text{disc}(P) \in K$  par le théorème fondamental des polynômes symétriques (théorème 2.2.6). De plus,  $\text{disc}(P) \neq 0$  si et seulement si  $P(X)$  est séparable.

**Lemme 2.2.27.** Soit  $P(X) \in K[X]$  unitaire de degré  $n$ . Alors

$$\text{disc}(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \leq i \leq n} P'(\alpha_i).$$

*Preuve:* On a  $P'(X) = \sum_{1 \leq i \leq n} \prod_{j \neq i} (X - \alpha_j)$ . Donc  $P'(\alpha_i) = \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$ . D'où

$$\prod_i P'(\alpha_i) = \prod_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = (-1)^{n(n-1)/2} \text{disc}(P).$$

**Exemple 2.2.28** Soit  $K$  un corps de caractéristique nulle. Soit  $P(X) = X^n - 1 \in K[X]$ . Soit  $\mu_n \subset \bar{K}$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de 1. Alors  $P'(\zeta) = n\zeta^{n-1}$  pour tout  $\zeta \in \mu_n$ . Donc

$$(-1)^{n(n-1)/2} \text{disc}(X^n - 1) = \prod_{\zeta \in \mu_n} (n\zeta^{n-1}) = n^n \left( \prod_{\zeta \in \mu_n} \zeta^{n-1} \right) = (-1)^{n^2-1} n^n$$

et  $\text{disc}(X^n - 1) = (-1)^{(n^2+n-2)/2} n^n$ . On peut voir (exercice) que ce calcul reste correct pour  $K$  de caractéristique quelconque.

**Exemple 2.2.29** Soit  $P(X) = X^n + aX + b \in K[X]$  un polynôme. Alors

$$\text{disc}(P(X)) = (-1)^{n(n-1)/2} (n^n b^{n-1} + (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} a^n).$$

On retrouve les formules connues pour  $n = 2, 3$ . Montrons cette formule. Le cas  $a = 0$  se traite comme dans l'exemple précédent. Supposons donc  $a \neq 0$ . Le cas  $b = 0$  est laissé en exercice (utiliser le calcul de  $\text{disc}(X^{n-1} + a)$ ). Supposons donc aussi  $b \neq 0$ .

Soit  $P(X) = \prod_{1 \leq i \leq n} (X - \alpha_i)$  la décomposition de  $P(X)$  dans une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ . On va calculer le discriminant avec la formule du lemme 2.2.27. On a

$$P'(\alpha_i) = n\alpha_i^{n-1} + a = \alpha_i^{-1} (n(-a\alpha_i - b) + a\alpha_i) = (n-1)a\alpha_i^{-1} (nb / ((n-1)a) - \alpha_i)$$

(Noter que  $\alpha_i \neq 0$  car  $b \neq 0$ ). Il suit que

$$\prod_i P'(\alpha_i) = ((n-1)a)^n \left( \prod_i \alpha_i \right)^{-1} \prod_i (nb/(n-1)a - \alpha_i).$$

Or  $(\prod_i \alpha_i) = (-1)^n b$  et  $\prod_i (nb/(n-1)a - \alpha_i) = P(nb/(n-1)a)$ . Le résultat final en découle par un calcul direct.

**Proposition 2.2.30.** *Soit  $L = K[\theta]$  une extension séparable. Soit  $m_\theta(X)$  le polynôme minimal de  $\theta$ . Alors  $\Theta := \{1, \theta, \dots, \theta^{n-1}\}$  est une base de  $L/K$  et on a*

$$D_{L/K}(\Theta) = \text{disc}(m_\alpha(X)) = (-1)^{n(n-1)/2} N_{L/K}(m'_\theta(\theta)).$$

*Démonstration.* La première égalité n'est rien d'autre que l'égalité (2.2). La seconde égalité résulte du lemme 2.2.27 précédent et du théorème 2.2.17.  $\square$

## 2.3 Applications aux extensions entières

Soit  $A$  un anneau intègre,  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans une extension  $L$  de  $K = \text{Frac}(A)$ . Nous allons étudier la structure de  $B$  comme  $A$ -module (surtout quand  $L/K$  est séparable). Nous allons notamment montrer que l'anneau des entiers d'un corps de nombres est toujours fini sur  $\mathbb{Z}$  (donc de type fini comme  $\mathbb{Z}$ -module).

### 2.3.1 Finitude de la clôture intégrale

**Proposition 2.3.1.** *Soient  $A$  un anneau intègre de corps des fractions  $K$ ,  $L$  une extension algébrique de  $K$ .*

(1) *Soit  $C$  la clôture intégrale (déf. 2.1.12) de  $A$  dans  $L$ . Alors*

$$L = \left\{ \frac{c}{a} \mid a \in A \setminus \{0\}, c \in C \right\}.$$

*En particulier  $L = \text{Frac}(C)$ .*

(2) *Soit  $A \subseteq B$  avec  $B$  anneau libre de rang  $n$  sur  $A$  et  $L = \text{Frac}(B)$ . Alors  $n = [L : K]$ . De plus toute famille libre à  $n$  éléments de  $B$  (en tant que  $A$ -module) est une base de  $L$  comme  $K$ -espace vectoriel.*

*Démonstration.* (1) Soit  $\alpha \in L$ . Soit

$$\alpha^n + t_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + t_0 = 0, \quad t_i \in K$$

une relation algébrique de  $\alpha$  sur  $K$ . Soit  $a \in A$  non nul tel que  $at_i \in A$  pour tout  $i \leq n-1$  (un dénominateur commun des  $t_i$ ). Alors  $c := a\alpha \in B$  et  $\alpha = c/a$ .

(2) Soit  $\alpha \in L$ . Montrons d'abord que  $\alpha$  peut s'écrire comme une fraction avec dénominateur dans  $A$ . On a  $\alpha = c/b$  avec  $b, c \in B$  et  $b \neq 0$ . Soit

$$b^m + a_{m-1}b^{m-1} + \cdots + a_1b + a_0 = 0, \quad a_i \in A$$

une relation entière de degré  $m$  minimal. Alors  $a_0 \neq 0$ . Il suit que

$$\frac{c}{b} = \frac{c(-a_1 - \cdots - a_{m-1}b^{m-2} - b^{m-1})}{a_0}$$

est une fraction avec dénominateur dans  $A$  et numérateur dans  $B$ .

Soit  $b_1, \dots, b_n$  une base de  $B$  sur  $A$ . Il suit immédiatement de ce qui précède que pour tout  $\alpha \in L$ , il existe  $a \in A$  non nul et  $a_1, \dots, a_n \in A$  tels que  $a\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i$  et donc

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i a^{-1}) b_i, \quad a_i a^{-1} \in K.$$

Donc  $\{b_1, \dots, b_n\}$  est une famille génératrice de  $L/K$ . Elle est libre sur  $K$  car toute relation linéaire entre les  $b_i$  sur  $K$  induit une relation linéaire sur  $A$  en multipliant par un dénominateur commun des coefficients. Donc les  $b_i$  forment une base de  $L/K$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.2.** *Sous les hypothèses de 2.3.1(2), pour tout  $b \in B$ , on a*

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(b) = \mathrm{Tr}_{B/A}(b), \quad \mathrm{N}_{L/K}(b) = \mathrm{N}_{B/A}(b).$$

*Démonstration.* Soit  $b_1, \dots, b_n$  une base de  $B$  sur  $A$ . D'après la proposition 2.3.1 ci-dessus, c'est aussi une base de  $L$  sur  $K$ . Les endomorphismes  $[b]_B$  et  $[b]_L$  de  $L$  ont la même matrice dans la base des  $b_i$ . Donc ils ont la même trace et le même déterminant.  $\square$

Dans le corollaire ci-dessus,  $\mathrm{Tr}_{L/K}$  et  $\mathrm{N}_{L/K}$  envoient les éléments de  $B$  dans  $A$ .

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $A$  un anneau intégralement clos de corps des fractions  $K$ . Soit  $A \subseteq B$  une extension entière d'anneaux intègres avec  $L := \mathrm{Frac}(B)$  finie sur  $K$ . Alors pour tout  $b \in B$ ,  $\mathrm{Tr}_{L/K}(b), \mathrm{N}_{L/K}(b) \in A$ . De plus,  $b \in B^*$  si et seulement si  $\mathrm{N}_{L/K}(b) \in A^*$ .*

*Démonstration.* La première partie résulte de la proposition 2.2.14. Supposons  $b \in B^*$ , d'inverse  $c \in B$ . Alors  $\mathrm{N}_{L/K}(b), \mathrm{N}_{L/K}(c) \in A$  avec  $\mathrm{N}_{L/K}(b)\mathrm{N}_{L/K}(c) = \mathrm{N}_{L/K}(bc) = 1$ . Donc  $\mathrm{N}_{L/K}(b) \in A^*$ .

Inversement, supposons  $\mathrm{N}_{L/K}(b) \in A^*$ . Soit

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in A[X]$$

le polynôme minimal de  $b$  sur  $K$ . Alors  $a_0 = (-1)^n \mathrm{N}_{L/K}(b) \in A^*$  et la relation

$$b(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

implique que  $b \in B^*$ .  $\square$

**Theorem 2.3.4.** *Soit  $A$  un anneau intègre, noethérien et intégralement clos, soit  $L/K$  une extension finie séparable et soit  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $L$ . Alors  $B$  est finie sur  $A$ . En particulier,  $B$  est noethérien.*

*Démonstration.* Soit  $e_1, \dots, e_n$  une base de  $L/K$ . Par 2.3.1, quitte à multiplier les  $e_i$  par un élément  $a \in A$  non nul (ce qui ne change pas la propriété d'être une base vectorielle sur  $K$ ), on peut ramener les  $e_i$  dans  $B$ . Par 2.2.22, la forme trace  $\mathrm{Tr}_{L/K}$  est non-dégénérée. Il existe donc une base duale  $e_1^\vee, \dots, e_n^\vee \in L$  :

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(e_i e_j^\vee) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

(En général,  $e_i^\vee \notin B$ .) Pour tout  $b \in B$ , il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  tels que  $b = \lambda_1 e_1^\vee + \dots + \lambda_n e_n^\vee$ . Donc  $\lambda_j = \mathrm{Tr}_{L/K}(b e_j) \in A$  (proposition 2.3.3). Donc

$$B \subseteq A e_1^\vee + \dots + A e_n^\vee.$$

Le membre de droite est un  $A$ -module de type fini. Comme  $A$  est noethérien, ce module est noethérien, donc  $B$  est de type fini comme  $A$ -module (par suite c'est un  $A$ -module noethérien). Tout idéal de  $B$  est un sous- $A$ -module de  $B$ , donc de type fini sur  $A$  et *a fortiori* de type fini sur  $B$ . Ce qui implique que  $B$  est un anneau noethérien.  $\square$

**Remarque 2.3.5** Le théorème 2.3.4 est faux sans l'hypothèse  $L/K$  séparable ou sans l'hypothèse  $A$  intégralement clos.

**Corollaire 2.3.6.** *Soit  $L$  un corps de nombres. Alors l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_L$  (2.1.13) de  $L$  est noethérien, intégralement clos, libre de rang  $[L : \mathbb{Q}]$  sur  $\mathbb{Z}$ .*

### 2.3.2 Discriminants d'anneaux d'entiers

Soit  $B$  un anneau intègre, libre de rang  $n$  sur un sous-anneau  $A$ . Nous avons alors la notion de traces  $\text{Tr}_{B/A}$  (voir la définition 2.2.3). Soit  $\varepsilon$  une base de  $B$ . Posons

$$D_{B/A}(\varepsilon) = \det(\text{Tr}_{B/A}(\varepsilon_i \varepsilon_j))_{i,j} \in A.$$

Si  $\varepsilon'$  est une famille de  $n$  éléments dans  $B$ , et si  $U \in M_n(A)$  est la matrice des coordonnées des  $\varepsilon'_i$  dans  $\varepsilon$ , alors comme pour les extensions de corps, on a

$$D_{B/A}(\varepsilon') = (\det U)^2 D_{B/A}(\varepsilon)$$

(où  $D_{B/A}(\varepsilon')$  est défini de même façon que  $D_{B/A}(\varepsilon)$ ). Si  $D_{B/A}(\varepsilon) \neq 0$ , alors  $\varepsilon'$  est une base de  $B$  si et seulement si  $\det U \in A^*$ .

**Remarque 2.3.7** Sous les hypothèses ci-dessous,  $\varepsilon$  est aussi une base de  $L := \text{Frac}(B)$  sur  $K$  (2.3.1(3)). Pour tout élément  $b \in B$ ,  $\text{Tr}_{B/A}(b) = \text{Tr}_{L/K}(b)$  (corollaire 2.3.2) et donc  $D_{L/K}(\varepsilon) = D_{B/A}(\varepsilon)$ . En particulier,  $D_{B/A}(\varepsilon) \neq 0$  si  $L/K$  est séparable.

**Corollaire 2.3.8.** *Soit  $L$  un corps de nombres. Alors  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$  est indépendant du choix d'une base  $\varepsilon$ .*

**Définition 2.3.9** L'entier  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}} := D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\varepsilon)$  s'appelle le *discriminant* de  $L$ . On le note parfois  $D_{L/\mathbb{Q}}$  ou même  $d_L$  dans les moments de grande paresse.

Nous allons d'abord déterminer le signe de  $D_{L/\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}$ .

**Définition 2.3.10** Un plongement  $\sigma \in \text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$  est dit *réel* si  $\sigma(L) \subset \mathbb{R}$ , et *imaginaire* sinon. On dit que  $L$  est *totalemtent réel* si tous les plongements sont réels et *totalemtent imaginaire* si tous les plongements sont imaginaires.

Comme  $L/\mathbb{Q}$  est séparable, on a  $L = \mathbb{Q}[\theta]$  pour un certain  $\theta \in L$ . Soit  $m_{\theta}(X) = \text{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, X) \in \mathbb{Q}[X]$ . C'est un polynôme de degré  $n = [L : \mathbb{Q}]$  avec  $n$  racines simples  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . Pour tout plongement  $\sigma \in \text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ , on a  $\sigma(L) = \mathbb{Q}[\sigma(\theta)]$ . Il suit que  $\sigma$  est réel si et seulement si  $\sigma(\theta) \in \mathbb{R}$ . On sait par ailleurs l'application  $\text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L; \overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  est une bijection (théorème 2.2.15(2.b)).

**Proposition 2.3.11.** *Soit  $n = [L : \mathbb{Q}]$ . Soient  $r_1$  (resp.  $r'_2$ ) le nombre de plongements réels (resp. imaginaires). Si  $L = \mathbb{Q}[\alpha]$ , alors  $r_1$  est le nombre de racines réelles du polynôme minimal  $m_{\alpha}(X)$ , et  $r'_2 = 2r_2$  est le nombre de racines imaginaires (non réelles) avec  $r_2 \in \mathbb{N}$ . Enfin on a*

$$n = r_1 + 2r_2.$$

*Démonstration.* La première partie de la proposition résulte des discussions ci-dessus. Comme  $m_\theta(X) \in \mathbb{R}[X]$ , les racines non-réelles viennent par paire :  $r'_2 = 2r_2$ . Enfin  $n = \deg m_\theta(X) = r_1 + r'_2$ .  $\square$

**Exemple 2.3.12** 1.  $\mathbb{Q}[i]$  est totalement imaginaire;  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  est totalement réel.

2. Si  $n \geq 3$ , alors  $\mathbb{Q}[\zeta_n]$  est totalement imaginaire.

3. Soit  $L = \mathbb{Q}[\theta]$ , où  $\theta$  est une racine d'un polynôme  $X^3 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$  supposé irréductible. Un plongement  $\sigma$  est déterminé par  $\sigma(\theta)$ . Il y en a un qui est réel et deux qui sont imaginaires ou bien trois réels. Si le discriminant  $-(4a^3 + 27b^2) > 0$ , on sait que les trois racines sont réelles, et donc que  $L$  est totalement réel. Si le discriminant est  $< 0$ , la formule de Cardan montre qu'il existe une racine réelle et deux imaginaires, donc  $r_1 = r_2 = 1$ .

**Exercice 2.3.13** Montrer que si  $L/\mathbb{Q}$  est galoisienne, alors  $L$  est totalement réel ou totalement imaginaire.

**Exercice 2.3.14** Soient  $L, E$  deux corps de nombres isomorphes (comme extensions de  $\mathbb{Q}$ ). Montrer qu'ils ont le même nombre de plongements réels (resp. imaginaires). Montrer aussi que  $d_L = d_E$ .

**Proposition 2.3.15.** *Le signe de  $D_{L/\mathbb{Q}}$  est  $(-1)^{r_2}$ .*

*Démonstration.* Écrivons  $L = \mathbb{Q}[\theta]$ . Soient

$$\theta_1, \dots, \theta_{r_1}, z_{r_1+1}, \bar{z}_{r_1+1}, \dots, z_{r_1+r_2}, \bar{z}_{r_1+r_2}$$

les racines du polynôme minimal  $m(X)$  de  $\theta$ , avec  $\theta_i \in \mathbb{R}$  et  $z_{r_1+j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , ordonnées de cette manière. On a alors

$$\text{disc}(m(X)) = c^2 \prod_{1 \leq i \leq r_2} (z_{r_1+i} - \bar{z}_{r_1+i})^2$$

avec un certain  $c \in \mathbb{R}^*$ . En effet, on peut regrouper les différences des racines de la manière suivante :

$$\theta_i - \theta_j \in \mathbb{R}, \quad \text{si } 1 \leq i < j \leq r_1$$

$$(\theta_i - z_{r_1+j})(\theta_i - \bar{z}_{r_1+j}) \in \mathbb{R}, \quad \text{si } i \leq r_1, j \leq r_2$$

et

$$(z_{r_1+i} - z_{r_1+j})(\bar{z}_{r_1+i} - \bar{z}_{r_1+j}), (z_{r_1+i} - \bar{z}_{r_1+j})(\bar{z}_{r_1+i} - z_{r_1+j}) \in \mathbb{R}$$

si  $1 \leq i < j \leq r_2$ .

Or  $(z_{r_1+i} - \bar{z}_{r_1+i})^2 \in \mathbb{R}$  est strictement négatif. Donc le signe du discriminant  $D_{L/K}(\{1, \theta, \dots, \theta^{n-1}\}) = \text{disc}(m(X))$  (proposition 2.2.30) est  $(-1)^{r_2}$ . Cela reste vrai pour toute base de  $L/\mathbb{Q}$  par le théorème 2.2.22 (1).  $\square$

**Définition 2.3.16** Une base de  $\mathcal{O}_L$  sur  $\mathbb{Z}$  est appelée une *base d'entiers* de  $L$ .

Le calcul du discriminant  $D_{L/\mathbb{Q}}$  nécessite souvent la connaissance d'une base d'entiers.

**Proposition 2.3.17.** *Soit  $L$  un corps de nombres. Soit  $\underline{b} = \{b_1, \dots, b_n\}$  une famille de  $n = [L : \mathbb{Q}]$  éléments de  $\mathcal{O}_L$ . Si  $D_{L/\mathbb{Q}}(\underline{b}) \in \mathbb{Z}$  est non nul, sans facteur carré, alors  $\underline{b}$  est une base de  $\mathcal{O}_L$  sur  $\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* En effet, si  $U \in M_n(\mathbb{Z})$  est la matrice qui exprime  $\underline{b}$  en fonction d'une base  $\varepsilon$ , on a

$$D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\underline{b}) = \det(U)^2 D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}.$$

Donc  $\det(U) = \pm 1$  et  $U$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{Z})$ .  $\square$

**Exemple 2.3.18** Soit  $d$  un entier relatif sans facteur carré et différent de 1. Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ . Si  $d \equiv 1 \pmod{4}$ . On écrit  $d = 4m + 1$ . Soit  $\alpha = (\sqrt{d} - 1)/2$ . Le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $\mathbb{Q}$  est  $X^2 + X - m$ . Il suit que  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\{1, \alpha\}) = \text{disc}(X^2 + X - m) = d$  est sans facteur carré. Donc  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\alpha]$  et  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}} = d$ .

**Exemple 2.3.19** Soit  $L = \mathbb{Q}[\alpha]$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de  $X^5 - X - 1$  (dont on prouve l'irréductibilité directement en partant d'une décomposition  $(X^2 + aX + b)(X^3 - aX^2 + cX - b)$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ ). Soit  $\underline{b} = \{1, \alpha, \dots, \alpha^4\}$ . Alors  $D_{L/\mathbb{Q}}(\underline{b}) = \text{disc}(X^5 - X - 1) = 19.151$  (proposition 2.2.30 et exemple 2.2.29 ou utiliser le logiciel pari, commande `poldisc` sous `gp`). Cela montre que  $\underline{b}$  est une base de  $\mathcal{O}_L$  et donc aussi  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\alpha]$ .

**Exemple 2.3.20** Soit  $L = \mathbb{Q}[\zeta_p]$  avec  $p > 2$  premier et  $\zeta_p \in \mathbb{C}$  une racine primitive  $p$ -ième de l'unité. Alors  $\varepsilon = \{1, \zeta_p, \dots, \zeta_p^{p-2}\}$  est une base de  $L$  sur  $\mathbb{Q}$  et

$$D_{L/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = (-1)^{(p-1)(p-2)/2} N_{L/\mathbb{Q}}(\Phi_p'(\zeta_p)).$$

(proposition 2.2.30). On a  $(X-1)\Phi_p(X) = X^p - 1$ , donc

$$(X-1)\Phi_p'(X) + \Phi_p(X) = pX^{p-1}$$

et

$$\Phi_p'(\zeta_p) = p \frac{\zeta_p^{p-1}}{\zeta_p - 1}, \quad N_{L/\mathbb{Q}}(\Phi_p'(\zeta_p)) = p^{p-1} \frac{1}{p} = p^{p-2}$$

(exemple 2.2.13). Notons que  $p-2$  étant impair et  $(p-1)/2 \in \mathbb{N}$ , le signe de  $D_{L/\mathbb{Q}}$  est  $(-1)^{(p-1)/2}$ . Par ailleurs, tous les conjugués de  $\zeta_p$  sont des nombres imaginaires. Donc  $L$  est totalement imaginaire, de degré  $(p-1)/2$  sur  $\mathbb{Q}$ . Cela confirme la proposition 2.3.15.

On montrera (proposition 5.2.7) que  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta_p]$ . Il suit que

$$D_{L/\mathbb{Q}} = (-1)^{(p-1)/2} p^{p-2}.$$

Le cas complémentaire à l'exemple 2.3.18, c'est-à-dire le cas de  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  avec  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$  sera traité avec la proposition qui suit.

**Proposition 2.3.21** (Stickelberger). *Soit  $L$  un corps de nombres. Alors on a  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}} \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  une base de  $\mathcal{O}_L$  sur  $\mathbb{Z}$ . Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  les éléments de  $\text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \bar{\mathbb{Q}})$ . Alors  $D_{L/\mathbb{Q}} = (\det M)^2$  où  $M = (\sigma_i(\varepsilon_j))_{i,j} \in M_n(\bar{\mathbb{Q}})$ . Par définition,

$$\det M = \sum_{\gamma \in S_n} \text{sign}(\gamma) \prod_{1 \leq i \leq n} \sigma_{\gamma(i)}(\varepsilon_i)$$

où  $S_n$  est groupe symétrique d'indice  $n$ . On peut écrire  $\det M = P - I$  où  $P$  est la somme des termes (lorsque l'on développe le déterminant, voir le début du §2.2.1) correspondant aux permutations de signature 1 et  $I$  les autres. Concrètement,

$$P = \sum_{\gamma \in A_n} \prod_{1 \leq i \leq n} \sigma_{\gamma(i)}(\varepsilon_i), \quad I = \sum_{\gamma \in S_n^-} \prod_{1 \leq i \leq n} \sigma_{\gamma(i)}(\varepsilon_i).$$

où  $S_n^-$  désigne les permutations de signature  $-1$ . Alors

$$(\det M)^2 = (P - I)^2 = (P + I)^2 - 4PI.$$

Soit  $N$  la clôture galoisienne de  $L/\mathbb{Q}$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}$ . Alors tout plongement  $\sigma$  envoie  $L$  dans  $N$  (utiliser le théorème 2.2.15(1)). Donc  $P, I \in N$ . Nous allons montrer que  $P+I, PI \in \mathbb{Q}$ , c'est-à-dire que ces quantités sont invariantes par  $\text{Gal}(N/\mathbb{Q})$ . Ce qui impliquera que  $P+I, PI \in \mathbb{Q} \cap \mathcal{O}_N = \mathbb{Z}$  et donc que  $D_{L/K} \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . En effet, le carré d'un entier relatif est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4.

Pour tout  $\tau \in \text{Gal}(N/\mathbb{Q})$ , l'application

$$\text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \bar{\mathbb{Q}}), \quad \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$$

est une bijection. Fixons  $\tau \in \text{Gal}(N/\mathbb{Q})$ . Il existe donc  $\gamma_0 \in S_n$ , dépendant de  $\tau$ , tel que  $\tau\sigma_i = \sigma_{\gamma_0(i)}$  pour tout  $i \leq n$ . On a

$$\tau(P) = \sum_{\gamma \in A_n} \prod_{1 \leq j \leq n} \sigma_{\gamma_0 \circ \gamma}(\varepsilon_j) = \sum_{\gamma' \in \gamma_0 A_n} \prod_{1 \leq j \leq n} \sigma_{\gamma'}(\varepsilon_j)$$

et

$$\tau(I) = \sum_{\gamma' \in \gamma_0 S_n} \prod_{1 \leq j \leq n} \sigma_{\gamma'}(\varepsilon_j).$$

Par conséquent, on a  $\tau(P) = P, \tau(I) = I$  si  $\gamma_0 \in S_n$  et  $\tau(P) = I, \tau(I) = P$  sinon. Dans les deux cas,  $P+I, PI$  sont invariants par  $\tau$ . Cela étant vrai pour tout  $\tau \in \text{Gal}(N/\mathbb{Q})$ , on a bien  $P+I, PI \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.22.** *Si  $[L : \mathbb{Q}] = n$  et si une famille de  $n$  éléments dans  $\mathcal{O}_L$  a son discriminant égal à  $4d$  avec  $d$  un entier non nul sans facteur carré et  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ , alors cette famille est une base de  $\mathcal{O}_L$ .*

*Démonstration.* Sinon, le discriminant de cette famille est égal à  $a^2 D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}$  pour un carré  $a^2 > 1$ . Donc  $a = 2$  et  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}} = d$ . Ce qui est impossible d'après Stickelberger.  $\square$

**Exemple 2.3.23** Si  $d \neq 0$  est un entier sans facteur carré, congru à 2 ou 3 mod 4, et  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ , on a

$$D_{L/\mathbb{Q}}(\{1, \sqrt{d}\}) = 4d.$$

Donc  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . Cela peut cependant se montrer par un calcul direct simple. Notons que toute extension quadratique de  $\mathbb{Q}$  est de la forme  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  pour un entier  $d \neq 0, 1$  sans facteur carré.

En général c'est une question difficile de trouver une base d'entier d'un anneau d'entiers. Pour des calculs concrets, on peut utiliser par exemple le logiciel `pari` ou `Sage`.



## Chapitre 3

# Anneaux de Dedekind

Les anneaux de Dedekind sont des généralisations des anneaux d'entiers de corps de nombres. Cette notion est plus souple que celle des anneaux d'entiers. Elle inclut en particulier les localisations des anneaux d'entiers. Elle inclut aussi des anneaux qui proviennent de la géométrie algébrique. Il est souvent plus agréable de travailler dans ce cadre plus général.

### 3.1 Décomposition des idéaux

#### 3.1.1 Anneaux de Dedekind, définition et exemples

**Définition 3.1.1** Un anneau intègre  $A$  est un *anneau de Dedekind* si

1.  $A$  est noethérien et intégralement clos (2.1.15),
2. et si  $A$  est de *dimension de Krull* 1 : les idéaux premiers non nuls de  $A$  sont maximaux et  $A$  n'est pas un corps (ce qui équivaut à l'existence d'un idéal maximal non nul).

**Exemple 3.1.2** Nous prenons la convention qu'un **corps n'est pas un anneau principal**. Alors tout anneau principal  $A$  est un anneau de Dedekind. En effet, tout idéal premier non nul est engendré par un élément irréductible  $f$ . Si  $fA \subseteq I = f'A$ , alors  $f' \mid f$ , donc  $f'$  est inversible ou associé à  $f$ , donc  $I = A$  ou  $fA$ . Ce qui montre que  $fA$  est maximal. Mais il existe des anneaux de Dedekind qui ne sont pas principaux, voir l'exemple 3.1.5.

La proposition suivante donne une méthode générale pour produire des anneaux de Dedekind.

**Proposition 3.1.3.** *Soient  $A$  un anneau de Dedekind,  $L$  une extension finie séparable de  $A$  et  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $L$ . Alors  $B$  est un anneau de Dedekind.*

*De plus pour tout idéal maximal  $\mathfrak{q}$  de  $B$ , l'intersection  $\mathfrak{q} \cap A$  est un idéal maximal de  $A$ .*

*Démonstration.* (1) Par construction,  $B$  est intégralement clos. On a vu dans 2.3.4 que  $B$  est noethérien et fini sur  $A$ .

(2) Montrer que  $B$  n'est pas un corps. Comme  $A$  n'en est pas un, il existe  $a \in A$  non nul et non inversible. Si  $B$  était un corps, alors  $1/a \in B$  et serait entier sur  $A$ , donc  $1/a \in A$  puisque  $A$  est intégralement clos et donc  $a \in A^*$ , contradiction.

(3) Soit  $\mathfrak{q}$  un idéal premier non nul de  $B$ . Alors  $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap A$  est un idéal premier de  $A$ . Montrons qu'il est non nul. Soit  $b \in B$  non nul. Il vérifie une relation entière

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0 = 0 \quad (3.1)$$

avec  $a_i \in A$ . On peut supposer  $a_0 \neq 0$  car sinon on peut simplifier l'égalité par  $b$  et en obtenir une nouvelle de degré  $n-1$ . Si  $b \in \mathfrak{q}$ , alors  $a_0 \in \mathfrak{q} \cap A$  et est non nul. Par suite  $\mathfrak{p}$  est un idéal maximal de  $A$ .

Montrons que  $\mathfrak{q}$  est aussi maximal, c'est-à-dire que  $B/\mathfrak{q}$  est un corps. Soit  $x \in B/\mathfrak{q}$  non nuls. Il est de la forme  $x = \bar{b}$  pour un  $b \in B \setminus \mathfrak{q}$ . Dans la relation (3.1) ci-dessus, il existe  $0 \leq m \leq n-1$  tel que  $a_i \in \mathfrak{p}$  pour tout  $0 \leq i \leq m-1$  et  $a_m \notin \mathfrak{p}$ . En effet il est impossible que tous les coefficients  $a_j$  appartiennent à  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ , car  $b^n$ , et donc  $b$ , appartiendrait à  $\mathfrak{q}$ . Dans l'anneau quotient  $B/\mathfrak{q}$  qui est intègre, on a alors une relation

$$x^{n-m} + \bar{a}_{n-1}x^{n-m-1} + \cdots + \bar{a}_{m+1}x + \bar{a}_m = 0, \quad \bar{a}_m \neq 0$$

(pour  $a \in A$ ,  $\bar{a}$  désigne son image dans  $A/\mathfrak{p}$  qui est canoniquement un sous-anneau de  $B/\mathfrak{q}$ ). Comme  $A/\mathfrak{p}$  est un corps, il existe  $a \in A$  tel que  $\bar{a}\bar{a}_m = -1$ . Il suit que

$$x(x^{n-m-1} + \bar{a}_{n-1}x^{n-m-2} + \cdots + \bar{a}_{m+1})\bar{a} = 1,$$

et que  $x$  est inversible dans  $B/\mathfrak{q}$ . □

**Corollaire 3.1.4.** *L'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_L$  d'un corps de nombres  $L$  est un anneau de Dedekind.*

Rappelons que dans un anneau factoriel, tout élément irréductible est premier (i.e. l'idéal qu'il engendre est premier). Accessoirement, cette propriété caractérise les anneaux factoriels parmi les anneaux noethériens intègres.

**Exemple 3.1.5** Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ . Montrons que 2 est irréductible mais pas premier dans l'anneau de Dedekind  $\mathcal{O}_L$ . Ce qui impliquera que  $\mathcal{O}$  n'est pas factoriel et donc pas principal. Comme  $-5 \equiv 3 \pmod{4}$ , on a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  (exemple 2.3.23). Montrons que 2 est un élément irréductible de  $\mathcal{O}_L$ . Soit

$$2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

une décomposition de 2. En prenant la norme sur  $\mathbb{Z}$ , on obtient

$$4 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2).$$

Comme  $5 > 4$ , on a  $b = d = 0$  et  $2 = \pm ac$ . Il suit que  $a + b\sqrt{-5}$  ou  $c + d\sqrt{-5}$  est égal à  $\pm 1$  et est inversible. Cela montre que  $2$  est irréductible dans  $\mathcal{O}_L$ . Par ailleurs,

$$(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6 \in 2\mathcal{O}_L,$$

mais  $1 + \sqrt{-5}$ ,  $1 - \sqrt{-5} \notin 2\mathcal{O}_L = 2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ . Donc  $2\mathcal{O}_L$  n'est pas un idéal premier et  $2$  n'est pas premier.

**Remarque 3.1.6** Il existe des exemples d'anneaux de Dedekind qui proviennent de la géométrie algébrique. Si  $P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$  est un polynôme irréductible tel que  $P, \partial P/\partial X$  et  $\partial P/\partial Y$  n'ont pas de zéro commun dans  $\mathbb{C}^2$ , alors on peut montrer que l'anneau quotient  $\mathbb{C}[X, Y]/P(X, Y)\mathbb{C}[X, Y]$  est un anneau de Dedekind.

**Exercice 3.1.7** Soit  $f(X) \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non constant et sans racine multiple. Montrer que  $B = \mathbb{C}[X, Y]/P(X, Y)\mathbb{C}[X, Y]$ , où  $P(X, Y) = Y^2 - f(X)$ , est un anneau de Dedekind (indications : montrer que  $\text{Frac}(B)$  est une extension séparable de degré 2 de  $\mathbb{C}(X)$  et que  $B$  est la clôture intégrale de  $\mathbb{C}[X]$  dans  $\text{Frac}(B)$ ). On utilisera le fait que  $B = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]y$  où  $y$  désigne l'image de  $Y$  dans le quotient  $B$ ).

### 3.1.2 Idéaux fractionnaires

Rappelons que dans un anneau  $A$ , on définit le produit de deux idéaux  $I, J$  comme étant l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme  $xy$  avec  $x \in I, y \in J$ . C'est l'idéal de  $A$  engendré par les  $xy, x \in I, y \in J$ . (En général  $IJ$  est strictement plus grand que cet ensemble des  $xy$ . Mais si  $I = aA$ , alors  $IJ = \{ay \mid y \in J\}$ .) Cette opération fait de l'ensemble des idéaux non-nuls de  $A$  un monoïde unitaire, qui n'est essentiellement jamais un groupe. Dans l'étude des anneaux de Dedekind, il est souvent utile de considérer l'« inverse » d'un idéal non nul.

**Définition 3.1.8** Soient  $A$  un anneau noethérien intègre. Soit  $K = \text{Frac}(A)$ . Un idéal fractionnaire de  $A$  est un sous- $A$ -module non nul  $M$  de  $K$  de type fini.

**Exemple 3.1.9** 1. Il suit de la définition que les idéaux fractionnaires contenus dans  $A$  sont exactement les idéaux non nuls de  $A$ .

2. Soit  $\alpha \in K^*$ , soit  $M$  un idéal fractionnaire. Alors  $\alpha M := \{\alpha x \mid x \in M\}$  est encore un idéal fractionnaire. Les idéaux fractionnaires de la forme  $\alpha A$  sont appelés des *idéaux fractionnaires principaux*.

**Proposition 3.1.10.** Soit  $M$  un sous- $A$ -module de  $K$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $M$  est un idéal fractionnaire ;
- (ii) il existe  $\alpha \in K^*$  et un idéal  $I$  de  $A$  tels que  $M = \alpha I$  ;
- (iii) il existe  $\alpha \in K^*$  tel que  $M \subseteq \alpha A$ .

*Démonstration.* (i)  $\implies$  (ii). Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  des générateurs du  $A$ -module  $M$ . Il existe  $a \in A$  non nul tel que  $ax_i \in A$  pour tout  $i \leq n$ . Il suit que  $I := aM \subseteq A$ . C'est un sous- $A$ -module de  $A$ , donc un idéal, et on a  $M = a^{-1}I$ .

(ii) implique trivialement (iii). Enfin (iii) implique (i) car  $\alpha A$  est un  $A$ -module de type fini. Comme  $A$  est noethérien, cela implique que  $M$  est de type fini.  $\square$

**Définition 3.1.11** Soient  $M, N$  deux idéaux fractionnaires. On définit le produit  $MN$  comme étant le sous- $A$ -module de  $K$  engendré par les éléments  $xy$  avec  $x \in M, y \in N$ . Si  $M = \alpha I$  et  $N = \beta J$ , alors  $MN = (\alpha\beta)IJ$  est aussi un idéal fractionnaire. On a  $(\alpha A)(\beta A) = (\alpha\beta)A$ .

Si  $M, N$  sont des idéaux de  $A$ , cette définition coïncide avec celle des produits d'idéaux.

Si  $\alpha \in K^*$ , alors  $(\alpha A)M = \alpha M$ .

**ATTENTION :** en général l'ensemble des  $xy$  est strictement plus petit que  $MN$ .

**Exemple 3.1.12** Tout idéal fractionnaire  $M$  de  $\mathbb{Z}$  est de la forme  $M = r\mathbb{Z}$  pour un nombre rationnel  $r \in \mathbb{Q}$  non nul.

On note  $I(A)$  l'ensemble des idéaux fractionnaires de  $A$ . Le produit des idéaux fractionnaires est clairement commutatif et associatif, avec l'idéal  $A$  comme élément neutre. On voudrait qu'il soit un groupe (voir corollaire 3.1.18). Pour tout idéal fractionnaire  $M$ , notons

$$M^{-1} := \{x \in K \mid xM \subseteq A\}. \quad (3.2)$$

Soit  $\alpha \in M$  un élément non nul, alors  $M^{-1}$  est un sous- $A$ -module de  $K$  contenu dans  $\alpha^{-1}A$ . Il suit de la proposition 3.1.10 que c'est un idéal fractionnaire.

On a toujours  $MM^{-1} \subseteq A$ . Si  $M$  admet un inverse  $N$  dans  $I(A)$ , c'est-à-dire que  $MN = A$ , alors on a nécessairement  $N \subseteq M^{-1}$  par définition de  $M^{-1}$ . Donc ce dernier est un candidat naturel pour être l'inverse de  $M$  dans  $I(A)$ .

**Exemple 3.1.13** 1. Soit  $A$  un anneau principal. Alors tout idéal fractionnaire  $M = \alpha I = \beta A$  pour un  $\beta \in K^*$ , et on a  $M^{-1} = \beta^{-1}A$ ,  $MM^{-1} = A$ .

2. Soit  $A = \mathbb{Q}[X, Y]$ , soit  $M = (X, Y)$  l'idéal engendré par  $X, Y$ . Alors  $M^{-1} = A$  (on a clairement  $A \subseteq M^{-1}$ . Si  $x \in M^{-1}$ , on écrit  $x = P/Q$  avec deux polynômes  $P, Q \in \mathbb{Q}[X, Y]$  premiers entre eux. Alors  $xX, xY \in A$  implique que  $Q$  divise  $X$  et  $Y$ , donc  $Q \in \mathbb{Q}^*$  et  $x \in \mathbb{Q}[X, Y]$ ), et  $MM^{-1} = M \neq A$ .

### 3.1.3 Théorème de décomposition des idéaux

Dans un anneau principal  $A$ , tout élément non nul  $a$  se décompose de manière unique comme produit d'éléments irréductibles  $a = \prod_i p_i$ . Comme le produit de deux idéaux principaux  $pA$ ,  $qA$  est égal à  $pqA$ , on a  $aA = \prod_i (p_i A)$ . Donc tout idéal non nul se décompose comme produit d'idéaux maximaux. Cette dernière propriété est plus faible que la décomposition des éléments, mais elle se généralise aux anneaux de Dedekind.

Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

**Lemme 3.1.14.** *Soient  $A$  un anneau de Dedekind et  $I$  un idéal non nul de  $A$ .*

- (1) *L'idéal  $I$  contient un produit  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$  d'idéaux premiers non nuls, non nécessairement distincts.*
- (2) *Tout idéal maximal de  $A$  contenant  $I$  est égal à un des  $\mathfrak{p}_i$  ci-dessus.*

*Démonstration.* (1) Cette partie est valable pour tout anneau noethérien. Considérons l'ensemble  $\mathcal{S}$  des idéaux non nuls de  $A$  ne vérifiant pas la propriété énoncée et supposons cet ensemble non vide. Comme  $A$  est noethérien, cet ensemble admet un élément maximal (pour l'inclusion)  $I$ . Par définition de  $\mathcal{S}$ ,  $I$  n'est pas premier. Il existe donc  $a, b \in A \setminus I$  tels que  $ab \in I$ . Considérons les idéaux  $I + aA, I + bA$  de  $A$ . Ils contiennent strictement  $I$ . Par la maximalité de  $I$  dans  $\mathcal{S}$ , ces idéaux n'appartiennent pas à  $\mathcal{S}$ . On a donc

$$I + aA \supseteq \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, \quad I + bA \supseteq \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m$$

avec des idéaux premiers non nuls  $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_j$ . Il suit que

$$\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m \subseteq (I + aA)(I + bA) \subseteq I.$$

Contradiction avec l'hypothèse  $I \in \mathcal{S}$ . Donc  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

(2) Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal contenant  $I$ . Supposons qu'aucun des  $\mathfrak{p}_i$  ne soit contenu dans  $\mathfrak{p}$ . On choisit alors un  $a_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}$  pour chaque  $i \leq n$ . Le produit  $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}$ , impossible car  $\mathfrak{p}$  est premier. Supposons donc que  $\mathfrak{p}$  contienne  $\mathfrak{p}_{i_0}$ , alors ils sont égaux puisque  $\mathfrak{p}_{i_0}$  est automatiquement maximal,  $A$  étant un anneau de Dedekind.  $\square$

**Lemme 3.1.15.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind. Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal de  $A$ . Alors dans le monoïde  $I(A)$  des idéaux fractionnaires on a  $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = A$ .*

*Démonstration.* Montrons d'abord qu'il existe  $x \in \mathfrak{p}^{-1} \setminus A$ . Fixons un  $a \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$  tel que  $\mathfrak{p} \neq aA$  (prendre pour  $a$  le carré d'un élément non nul de  $\mathfrak{p}$ ). On a une inclusion

$$\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subseteq aA \subset \mathfrak{p}$$

avec des idéaux maximaux  $\mathfrak{p}_i$  par le lemme 3.1.14 ci-dessus et on peut supposer que  $n$  est le plus petit possible. On a  $n \geq 2$  car  $aA \neq \mathfrak{p}$ . Par le même lemme, on peut supposer que  $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ . Par la minimalité de  $n$ , il existe  $b \in \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{n-1}$  et  $b \notin aA$ . Il suit que  $x := b/a \notin A$ . Mais

$$x\mathfrak{p} = a^{-1}(b\mathfrak{p}) = a^{-1}(b\mathfrak{p}_n) \subseteq a^{-1}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subseteq A,$$

donc  $x \in \mathfrak{p}^{-1}$ .

Par définition  $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}$  est un idéal fractionnaire contenu dans  $A$ . C'est donc un idéal de  $A$ . S'il n'est pas égal à  $A$ , il est contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}$ . Donc  $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ . En particulier  $x\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ . Il suit de la proposition 2.1.7(iii) que  $x \in K$  est entier sur  $A$ , donc  $x \in A$ . Contradiction.  $\square$

**Theorem 3.1.16.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind. Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Alors il existe des idéaux maximaux deux à deux distincts  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  et des entiers  $r_1, \dots, r_s \geq 1$  tels que*

$$I = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{r_s}$$

(si  $I = A$ , on convient que  $A$  est le produit d'idéaux maximaux indexé par un ensemble vide). Une telle décomposition est unique à permutation près. Les  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  sont exactement les idéaux premiers de  $A$  contenant  $I$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord l'existence. Il suffit de montrer que  $I$  est un produit fini d'idéaux maximaux (on regroupe ensuite par paquets ceux qui sont égaux). On écrit  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subseteq I$  comme avant et on raisonne par récurrence sur  $n$  (les  $\mathfrak{p}_i$  ne sont pas nécessairement distincts). Si  $n = 1$ , alors  $I = \mathfrak{p}_1$  ou  $A$  et il n'y a rien à démontrer. Si  $n \geq 2$ , on peut supposer que  $I \subseteq \mathfrak{p}_n$  et on a alors  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{n-1} \subseteq \mathfrak{p}_n^{-1}I \subseteq A$ . Par récurrence  $\mathfrak{p}_n^{-1}I$  est un produit d'idéaux maximaux  $\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m$ , il suit que  $I = \mathfrak{p}_n \mathfrak{p}_n^{-1}I = \mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m$ .

Lorsque l'on a une décomposition  $I = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{r_s}$  comme dans le théorème, chaque  $\mathfrak{p}_i$  contient  $I$ . Inversement si  $\mathfrak{p}$  est un idéal maximal contenant  $I$ , par le lemme 3.1.14,  $\mathfrak{p}$  est égal à un des  $\mathfrak{p}_i$ . Cela implique déjà l'unicité de l'ensemble des idéaux maximaux qui interviennent dans la décomposition de  $I$ . Le reste de l'unicité se démontre par une récurrence sur  $r_1 + \cdots + r_s$  en utilisant le lemme ci-dessus qui permet de "simplifier" par un idéal maximal dans un produit d'idéaux maximaux.  $\square$

**Remarque 3.1.17** Dans le cas des anneaux principaux on retrouve la décomposition au début expliquée au début de ce sous-paragraphe.

Revenons brièvement aux idéaux fractionnaires.

**Corollaire 3.1.18.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind. Alors l'ensemble  $I(A)$  des idéaux fractionnaires de  $A$  muni du produit un groupe commutatif. Plus précisément, si  $M \in I(A)$ , alors  $M^{-1}$  (voir (3.2)) est son inverse.*

*Démonstration.* On écrit  $M = \alpha I$  pour un  $\alpha \in K^*$  et  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Le théorème 3.1.16 permet d'écrire  $I$  comme produit d'idéaux maximaux  $I = \prod_i \mathfrak{p}_i$ . Il suit du lemme 3.1.15 que  $I(\prod_i \mathfrak{p}_i^{-1}) = A$  (par commutativité du produit). Donc  $M(\alpha^{-1}(\prod_i \mathfrak{p}_i^{-1})) = A$ . Ceci prouve que  $I(A)$  est un groupe.

Soit  $M \in I(A)$ , d'inverse  $N \in I(A)$ . Alors  $MM^{-1} \subseteq A = MN$ . En multipliant par  $N$ , on obtient  $M^{-1} \subseteq NMN = N$ . Par ailleurs, pour tout  $x \in N$ , on a  $xM \subseteq NM = A$ . Donc  $x \in M^{-1}$ . Par conséquent  $N = M^{-1}$ .  $\square$

**Exercice 3.1.19** Montrer que tout idéal fractionnaire  $M$  de  $A$  possède une décomposition unique

$$M = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{r_n}$$

avec  $r_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et que  $M \subseteq A$  si et seulement si  $r_i > 0$  pour tout  $i$ .

**Remarque 3.1.20** Pour un anneau intègre  $A$  en général, on peut si  $I(A)$  est un groupe, alors  $A$  est nécessairement un corps ou un anneau de Dedekind.

**Exemple 3.1.21** Revenons à l'exemple 3.1.5 dans un cadre très légèrement plus général. Soient  $d \geq 5$  un entier naturel sans facteur carré,  $d \equiv 1 \pmod{4}$  et  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ . On a vu que l'idéal  $2\mathcal{O}_L$  n'était pas premier (au moins pour  $d = 5$ ). Quelle est sa factorisation en produit d'idéaux maximaux? Comme  $-d \equiv 3 \pmod{4}$ , on sait que  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ . Soit  $\mathfrak{p}_2 = (2, 1 + \sqrt{-d})$ . Montrons que c'est un idéal maximal et que  $2\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_2^2$ .

L'idéal  $\mathfrak{p}_2^2$  est engendré par les produits de générateurs :  $4, 2(1 + \sqrt{-d}), (1 + \sqrt{-d})^2$ . On a

$$(1 + \sqrt{-d})^2 = 2\sqrt{-d} + (1 - d) \in 2\mathcal{O}_L.$$

Donc  $\mathfrak{p}_2^2 \subseteq 2\mathcal{O}_L$ . De plus, si on écrit  $d = 4m + 1$ , on a

$$-2 = (1 + \sqrt{-d})^2 - 2(\sqrt{-d} + 1) + 4m \in \mathfrak{p}_2^2.$$

Donc  $2\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_2^2$ . Noter cependant qu'on peut montrer que ni 2 lui-même, ni aucun élément associé à 2 n'est un carré dans  $\mathcal{O}_L$ . Pour voir cela, on montre que les unités de  $\mathcal{O}_L$  sont  $\pm 1$  et que  $N_{L/\mathbb{Q}}(z) \neq \pm 2$  pour tout  $z \in \mathcal{O}_L$ .

Il reste à montrer que  $\mathfrak{p}_2$  est un idéal maximal ou, de façon équivalente, que  $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_2$  est un corps. D'abord, comme  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-d} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(1 + \sqrt{-d})$ , tout élément de  $\mathcal{O}_L$  est congru, modulo  $\mathfrak{p}_2$ , à 0 ou 1. Donc  $|\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_2| \leq 2$ . D'autre part ce quotient est non nul : sinon  $1 \in \mathfrak{p}_2$  et donc  $\mathfrak{p}_2 = A$  et  $2\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_2^2 = A$ , ce qui est impossible car  $1 \notin 2\mathcal{O}_L$ . Par conséquent  $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_2$  est un anneau à 2 éléments, c'est donc le corps  $\mathbb{F}_2$  et  $\mathfrak{p}_2$  est maximal.

On verra au §3.2 une méthode plus systématique pour déterminer la décomposition de ce type d'idéaux.

**Remarque 3.1.22** La structure du groupe des idéaux fractionnaires est très simple. C'est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ . Par exemple, l'ensemble des idéaux maximaux d'un anneau d'entiers est dénombrable, donc  $I(\mathcal{O}_L) \simeq I(\mathbb{Z})$  pour tout corps de nombres  $L$ . On ne peut donc pas tirer énormément d'informations sur  $A$  à partir de  $I(A)$ .

**Définition 3.1.23** L'ensemble des idéaux fractionnaires principaux (ceux de la forme  $\alpha A$ , pour un  $\alpha \in K^*$ ) est un sous-groupe du groupe  $I(A)$ . Le groupe quotient est appelé le *groupe des classes* de  $A$ . On le note  $\text{Cl}(A)$ .

**Proposition 3.1.24.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind. Alors  $\text{Cl}(A) = \{1\}$  si et seulement si  $A$  est principal.*

*Démonstration.* Si  $A$  est principal, tout idéal fractionnaire est principal par la proposition 3.1.10. Inversement, supposons  $\text{Cl}(A) = \{1\}$ . Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Alors il existe  $x \in K^*$  tel que  $I = xA$ . On a  $x = x.1 \in I$ , donc  $x \in A$  et  $I$  est un idéal principal. Ce qui prouve que  $A$  est principal.  $\square$

**Définition 3.1.25** Soit  $L$  un corps de nombres, on appelle  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  le *groupe des classes* de  $L$ , et on le note (par abus de notation!)  $\text{Cl}(L)$ . On verra que ce groupe est fini. Son cardinal, noté  $h_L$  ou  $h(L)$ , est appelé le *nombre de classes* de  $L$ . C'est un invariant important de l'extension  $L$ . Mais on verra qu'il n'est pas toujours facile à déterminer, même pour les extensions quadratiques!

**Exemple 3.1.26** Soit  $d > 1$  sans facteur carré et soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$  (cf. exemple 3.1.5). On connaît toutes les valeurs de  $d$  pour lesquelles  $h_L$  vaut 1 :

$$1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163.$$

Ceux pour lesquels  $h_L$  vaut 2 :

$$5, 6, 10, 13, 15, 22, 35, 37, 51, 58, 91, 115, 123, 187, 235, 267, 403, 427.$$

On sait que  $h_L$  tend vers l'infini avec  $d$ . En revanche, on conjecture que  $h_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}$  vaut 1 pour une infinité de  $d$ .

Un anneau est *local* s'il a un unique idéal maximal. Voir § 3.3 pour plus d'informations.

**Proposition 3.1.27.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind local. Alors  $A$  est principal.*

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{p}$  l'idéal maximal de  $A$ . On a  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$  (sinon on obtient  $A = \mathfrak{p}$  en multipliant par  $\mathfrak{p}^{-1}$ ). Soit  $t \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ . Alors la décomposition de  $tA$  en produit d'idéaux maximaux est  $tA = \mathfrak{p}$ . Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ , alors il existe  $m \geq 0$  tel que  $I = \mathfrak{p}^m = t^m A$ . Donc  $A$  est principal.  $\square$

**Proposition 3.1.28.** *Soient  $A$  un anneau de Dedekind,  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal et  $t \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ . Alors il existe  $s \in A \setminus \mathfrak{p}$  tel que  $s\mathfrak{p} \subseteq tA \subseteq \mathfrak{p}$ .*

*Démonstration.* La décomposition de  $tA$  fait apparaître  $tA = \mathfrak{p}^r J$  avec  $J$  un produit d'idéaux maximaux différents de  $\mathfrak{p}$  (donc premier à  $\mathfrak{p}$ ), et  $r \geq 1$ . On a  $r = 1$  car  $t \in \mathfrak{p}$ . Soit  $s \in J \setminus \mathfrak{p}$  (il existe car  $J$  est premier à  $\mathfrak{p}$ ). Il suit que  $s\mathfrak{p} \subseteq J\mathfrak{p} = tA$ .  $\square$

### 3.1.4 Théorème des restes chinois

Si en général un anneau de Dedekind n'est pas principal, nous allons toute fois montrer que tout idéal est engendré par au plus 2 éléments (corollaire 3.1.33) en utilisant le théorème de restes chinois.

**Définition 3.1.29** Deux idéaux  $I, J$  d'un anneau  $A$  sont dits *premiers entre eux* si  $I + J = A$ . Cela revient à dire qu'il n'existe aucun idéal maximal de  $A$  contenant à la fois  $I$  et  $J$ .

**Lemme 3.1.30.** *Soit  $A$  un anneau.*

- (1) *Deux idéaux maximaux distincts dans  $A$  sont toujours premiers entre eux.*
- (2) *Si  $J_1, \dots, J_q$  sont des idéaux premiers à  $I$ , alors  $J_1 \cdots J_q$  est premier à  $I$ .*
- (3) *Soient  $I, J$  premiers entre eux. Soient  $m, n \geq 1$ . Alors  $I^m$  et  $J^n$  sont premiers entre eux.*

*Démonstration.* (1) Si  $I, J$  sont maximaux et distincts, alors  $I + J$  est un idéal qui contient strictement  $I$ , donc égal à  $A$ .

(2) Soient  $1 = \alpha_i + \beta_i$  avec  $\alpha_i \in I$  et  $\beta_i \in J_i$  pour tout  $i \leq q$ . Le produit de ces  $q$  égalités montre que  $1 \in I + \prod_{i \leq q} J_i$ .

(3) Utiliser deux fois (2). □

**Theorem 3.1.31** (Théorème des restes chinois). *Soit  $A$  un anneau. Considérons des idéaux  $I_1, \dots, I_n$  de  $A$  deux à deux premiers entre eux. Alors*

- (1) *On a  $\bigcap_{1 \leq i \leq n} I_i = \prod_{1 \leq i \leq n} I_i$ .*
- (2) *L'homomorphisme d'anneaux canonique  $A \rightarrow \prod_{1 \leq i \leq n} A/I_i$  est surjectif, et induit un isomorphisme*

$$A / \prod_{1 \leq i \leq n} I_i \simeq \prod_i A/I_i.$$

*Démonstration.* On se ramène par récurrence sur  $n$  au cas  $n = 2$  en utilisant le lemme ci-dessus. Soient deux idéaux  $I, J$  premiers entre eux. Soit  $1 = \alpha + \beta$  avec  $\alpha \in I$  et  $\beta \in J$ . Pour tout  $x \in I \cap J$ , on a  $x = x\alpha + x\beta \in IJ + IJ = IJ$ . D'où  $I \cap J \subseteq IJ$ . L'inclusion inverse est évidente. Ce qui montre (1).

Pour tous  $a, b \in A$ , on a  $a - b = (a - b)\alpha + (a - b)\beta$ , donc

$$a + (b - a)\alpha = b + (a - b)\beta \in (a + I) \cap (b + J).$$

Cela montre la surjectivité de  $A \rightarrow A/I \times A/J$ . Le théorème de factorisation des homomorphismes d'anneaux implique (2). □

**Lemme 3.1.32.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind. Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Alors tout idéal de  $A/I$  est engendré par un élément.*

*Démonstration.* (1) Supposons d'abord que  $I = \mathfrak{p}^r$  pour un idéal maximal  $\mathfrak{p}$  et  $r \geq 1$ . Notons d'abord que pour tout idéal non nul  $J \subseteq A$  premier à  $\mathfrak{p}$ , son image  $\bar{J}$  dans  $A/\mathfrak{p}^r$  est égal à l'idéal unité. En effet,  $J$  est premier à  $\mathfrak{p}^r$  d'après le lemme 3.1.30 :  $J + \mathfrak{p}^r = A$ . Donc  $1 \in I$  modulo  $\mathfrak{p}^r$ .

Soit  $t \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ . Considérons la décomposition de  $tA = \mathfrak{p}^s J_1$  où  $J_1$  est un produit d'idéaux maximaux distincts de  $\mathfrak{p}$ . Il suit que  $J_1$  est premier à  $\mathfrak{p}$ . Comme  $t \in \mathfrak{p}^s$ , on a  $s = 1$ . Soit  $H$  un idéal non nul de  $A/\mathfrak{p}^r$ . Son image réciproque

$H' \subseteq A$  est un idéal non nul et se décompose en  $H' = \mathfrak{p}^m J_2$  avec  $J_2$  premier à  $\mathfrak{p}$ . Il suit que  $H = \bar{\mathfrak{p}}^m$  et  $\bar{t}A/\bar{\mathfrak{p}}^r = \bar{\mathfrak{p}}$ . D'où  $H = \bar{t}^m A/\bar{\mathfrak{p}}^r$ .

(2) Cas général. Soit  $I = \prod_i \mathfrak{p}_i^{r_i}$  avec des idéaux maximaux 2 à 2 distincts et  $r_i \geq 1$ . Alors  $A/I \simeq \prod_i A/\mathfrak{p}_i^{r_i}$  par le théorème 3.1.31. Tout idéal de  $A/\mathfrak{p}_i^{r_i}$  étant monogène, il en est de même pour  $A/I$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.33.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind. Alors tout idéal  $I$  de  $A$  est engendré par au plus 2 éléments.*

*Démonstration.* On peut supposer  $I \neq 0$ . Soit  $a \in I$  non nul. Alors l'idéal  $I/aA$  de  $A/aA$  est engendré par un élément  $\bar{b}$  avec  $b \in I$ . Il suit que  $I = aA + bA$ .  $\square$

**Exercice 3.1.34** Soient  $C, D$  deux anneaux. Les addition et multiplication de l'anneau produit cartésien  $C \times D$  sont définies composante par composante. En particulier l'élément unité est  $(1, 1)$ .

Soit  $H$  un idéal de  $C \times D$ . Soit  $I = \{c \in C \mid (c, 0) \in H\}$  et soit  $J = \{d \in D \mid (0, d) \in H\}$ . Montrer que ce sont respectivement des idéaux de  $C$  et de  $D$  et que  $H = I \times J$  (utiliser la multiplication par  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  et l'égalité  $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ ).

## 3.2 Ramification

Dans l'exemple 3.1.21 nous avons vu que le nombre premier  $2 \in \mathbb{Z}$  n'est plus un élément premier dans l'anneau des entiers d'une extension quadratique  $L$ . Autrement dit, l'idéal  $2\mathcal{O}_L \subseteq \mathcal{O}_L$  engendré par l'idéal maximal  $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$  n'est plus maximal. Ce type de phénomène s'appelle la ramification, et c'est l'analogue de la notion de ramification pour les applications entre des variétés topologiques ou complexes (comme l'application conforme  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^2$ ).

Dans tout ce paragraphe §3.2, on est dans la situation suivante :  $A \subseteq B$  est une extension d'anneaux de Dedekind et on suppose  $B$  fini sur  $A$  (comme  $A$ -module). On note  $K$  le corps des fractions de  $A$  et  $L$  celui de  $B$ . Généralement,  $\mathfrak{p}$  désigne un idéal maximal de  $A$  et  $\mathfrak{q}$  un idéal maximal de  $B$ .

On s'attache à étudier la relation entre les idéaux maximaux de  $A$  et ceux de  $B$ . On a vu dans la démonstration de la proposition 3.1.3 que si  $\mathfrak{q} \cap A$  est un idéal maximal de  $A$ . Pour un idéal  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , on note  $\mathfrak{p}B$  l'idéal de  $B$  engendré par le sous-ensemble  $\mathfrak{p} \subseteq B$ . Concrètement que c'est l'ensemble des **sommes finies** de produits  $xb$  avec  $x \in \mathfrak{p}$  et  $b \in B$ . Si  $\mathfrak{p} = tA$  est principal, alors  $\mathfrak{p}B = tB$ .

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal de  $A$ , alors il existe un idéal maximal  $\mathfrak{q}$  de  $B$  tel que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ .*

*Démonstration.* Nous donnons une preuve *ad hoc* ici, mais la propriété est vraie dans des situations beaucoup plus générales. Montrons que  $\mathfrak{p}B \neq B$ .

Soit  $s\mathfrak{p} \subseteq tA \subseteq \mathfrak{p}$  comme dans la proposition 3.1.28 avec un  $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ . Si  $\mathfrak{p}B = B$ , alors on a une relation

$$1 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i b_i, \quad x_i \in \mathfrak{p}, b_i \in B.$$

Donc  $s = \sum_i t a_i b_i$  avec  $s x_i = t a_i$  et  $a_i \in A$  et donc  $s = tb$  avec un  $b \in B$ . Soit  $d = [L : K]$ . Il suit que  $s^d = t^d N_{L/K}(b)$  avec  $N_{L/K}(b) \in A$  (proposition 2.3.3). Par conséquent  $s^d \in t^d A \subseteq \mathfrak{p}$  et  $s \in \mathfrak{p}$ , contradiction.  $\square$

### 3.2.1 Ramification et décomposition

Soient  $A, B, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  comme plus haut avec  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ . Alors l'idéal  $\mathfrak{p}B$  de  $B$  engendré par le sous-ensemble  $\mathfrak{p}$  de  $B$  est non nul et se décompose donc en  $\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}^e I$  avec  $\mathfrak{q}$  premier à  $I$ . Comme  $\mathfrak{q} \cap A$  est un idéal premier contenant  $\mathfrak{p}$ , ils sont égaux. Le corps  $A/\mathfrak{p}$  (resp.  $B/\mathfrak{q}$ ) s'appelle le *corps résiduel* de  $A$  en  $\mathfrak{p}$  (resp. de  $B$  en  $\mathfrak{q}$ ). L'inclusion  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$  induit canoniquement une extension de corps  $A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{q}$ . Comme  $B$  est fini sur  $A$ , cette extension est finie.

**Définition 3.2.2** Dans la situation ci-dessus, on appelle l'entier  $e \geq 1$  l'*indice de ramification* de  $A \subseteq B$  en  $\mathfrak{q}$  et  $A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{q}$  l'*extension résiduelle* en  $\mathfrak{q}$ . Le degré de l'extension résiduelle est généralement noté  $f$ .

On dit que  $A \subseteq B$  est *non-ramifié* en  $\mathfrak{q}$  si  $e = 1$  et si l'extension résiduelle est séparable. Notons que la dernière condition est automatiquement satisfaite

pour les extensions  $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}_L$  d'anneaux d'entiers de corps de nombres. En effet, les corps résiduels sont alors des corps finis, et toute extension finie d'un corps fini est séparable.

Pour un  $\mathfrak{p}$  fixé, si  $A \subseteq B$  est non-ramifié en tous les  $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ , on dit que l'extension est *non-ramifiée au-dessus de  $\mathfrak{p}$* . Lorsque  $A = \mathbb{Z}$  et  $B = \mathcal{O}_L$ . On dira par abus de langage que  $L/\mathbb{Q}$  est non-ramifiée au-dessus de  $p$ .

**Exemple 3.2.3** 1. Dans l'exemple 3.1.21 avec  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ , l'indice de ramification de  $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}_L$  en  $\mathfrak{p}_2$  est égal à 2, avec une extension résiduelle triviale. Les indices de ramification en  $\mathfrak{p}_{3,1}$  et  $\mathfrak{p}_{3,2}$  sont égaux à 1 avec extensions résiduelles triviales. Donc  $L/\mathbb{Q}$  est non-ramifiée au-dessus de 3. De même les calculs de l'exemple montrent que  $L/\mathbb{Q}$  est non-ramifiée au-dessus de 11. En fait elle est non-ramifiée au-dessus de tout premier  $p \neq 2, 5$ .

2. Soit  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  un polynôme non constant. Considérons

$$A := \mathbb{C}[t] \subseteq B := \mathbb{C}[z], \quad \text{où } t = P(z).$$

Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal de  $A$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\mathfrak{p} = (t - \lambda)\mathbb{C}[t]$ . Tout idéal maximal  $\mathfrak{q}$  de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}B$  est de la forme  $\mathfrak{q} = (z - \mu)\mathbb{C}[z]$  avec  $P(\mu) - \lambda = 0$  (exercice). Alors l'indice de ramification en  $\mathfrak{q}$  est l'ordre d'annulation de  $P(X) - \lambda \in \mathbb{C}[X]$  en  $\mu$  et l'extension résiduelle est triviale. Notons que la somme des indices de ramification en les idéaux maximaux  $\mathfrak{q} \subseteq B$  contenant  $\mathfrak{p}$  est alors égale au  $\deg(P(X) - \lambda) = [\mathbb{C}(z) : \mathbb{C}(t)]$ . Ceci se généralise en théorème 3.2.9.

Nous allons maintenant préparer la preuve du théorème 3.2.9. On fixe  $A \subseteq B$  une extension finie d'anneaux de Dedekind. Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal de  $A$  et  $\mathfrak{q}$  un idéal maximal de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}$ . On note  $f = [B/\mathfrak{q} : A/\mathfrak{p}]$ .

**Lemme 3.2.4.** *Pour tout  $r \geq 0$ , on a un isomorphisme de  $B$ -modules*

$$B/\mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}^r/\mathfrak{q}^{r+1}.$$

*Démonstration.* Soit  $\pi \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{q}^2$ . Considérons l'homomorphisme  $B$ -linéaire

$$\phi : B \rightarrow \mathfrak{q}^r/\mathfrak{q}^{r+1}, \quad b \mapsto \overline{b\pi^r}.$$

Déterminons son noyau et son image. Fixons un  $s \in B \setminus \mathfrak{q}$  tel que  $s\mathfrak{q} \subseteq \pi B$  (proposition 3.1.28). Il est clair que  $\mathfrak{q} \subseteq \ker \phi$ . Inversement, si  $\phi(b) = 0$ , alors  $\pi^r b \in \mathfrak{q}^{r+1}$  et donc  $s^r \pi^r b \in \pi^{r+1} B$ . Il suit que  $s^r b \in \pi B \subseteq \mathfrak{q}$  et  $b \in \mathfrak{q}$  car  $s^r \notin \mathfrak{q}$ . D'où  $\ker \phi = \mathfrak{q}$ . Soit  $b \in \mathfrak{q}^r$ . Il existe  $b' \in B$ ,  $s^r b = \pi^r b'$ . Il existe  $s' \in B \setminus \mathfrak{q}$  tel que  $s^r s' \in 1 + \mathfrak{q}$  car  $\mathfrak{q} + s^r B = B$ . Par suite  $b \in \pi^r B + \mathfrak{q}^{r+1}$ , ce qui implique la surjectivité de  $\phi$ .

On termine la preuve en appliquant le théorème de factorisation à  $\phi$ .  $\square$

**Lemme 3.2.5.** *Soient  $R$  un anneau,  $I$  un idéal de  $R$  et  $M$  un  $R$ -module. Supposons que  $IM = 0$  (i.e.,  $ax = 0$  pour tout  $a \in I$  et pour tout  $x \in M$ ). Alors  $M$  est naturellement un  $R/I$ -module.*

*Démonstration.* Il suffit de définir la loi de produit externe. Pour toute classe  $\bar{a} \in R/I$  et tout  $x \in M$ , on pose  $\bar{a} * x = ax$ . Si  $\bar{a} = \bar{a}'$ , alors  $a - a' \in I$  et  $ax = a'x$ . Donc le produit externe est bien défini. Il est trivial de montrer que les axiomes d'un module sur  $R/I$  sont vérifiés.  $\square$

**Lemme 3.2.6.** *On conserve les mêmes hypothèses et notations. Soient  $e$  l'indice de ramification en  $\mathfrak{q}$  et  $f$  le degré de l'extension résiduelle  $A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{q}$ . Alors pour tout entier  $1 \leq r \leq e$ ,  $B/\mathfrak{q}^r$  est un  $A/\mathfrak{p}$ -espace vectoriel de dimension  $fr$ .*

*Démonstration.* Notons que  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \subseteq \mathfrak{q}^e \subseteq \mathfrak{q}^r$ , donc  $B/\mathfrak{q}^r$  est naturellement un espace vectoriel sur  $A/\mathfrak{p}$  d'après le lemme ci-dessus. On a une suite exacte d'espaces vectoriels sur  $A/\mathfrak{p}$  :

$$0 \rightarrow \mathfrak{q}^{r-1}/\mathfrak{q}^r \rightarrow B/\mathfrak{q}^r \rightarrow B/\mathfrak{q}^{r-1} \rightarrow 0.$$

D'où  $\dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{q}^r = \dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{q}^{r-1} + \dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{q}$  en utilisant le lemme 3.2.4 ci-dessus. Cela implique immédiatement le corollaire par récurrence sur  $r$ .  $\square$

**Proposition 3.2.7.** *Fixons  $\mathfrak{p}$  et considérons la décomposition de l'idéal  $\mathfrak{p}B$  de  $B$  :*

$$\mathfrak{p}B = \prod_{1 \leq i \leq m} \mathfrak{q}_i^{e_i}.$$

Notons  $f_i = [B/\mathfrak{q}_i : A/\mathfrak{p}]$ . On a

$$\dim_{A/\mathfrak{p}}(B/\mathfrak{p}B) = \sum_{1 \leq i \leq m} e_i f_i.$$

*Démonstration.* D'après le théorème des restes chinois 3.1.31, on a un isomorphisme canonique

$$B/\mathfrak{p}B \simeq \prod_{1 \leq i \leq m} B/\mathfrak{q}_i^{e_i}.$$

C'est un isomorphisme d'anneaux, mais aussi de  $B$ -modules (par construction), et donc de  $A$ -modules. Comme tous les modules en présence sont annihilés par  $\mathfrak{p}$ , c'est aussi un isomorphisme de  $A/\mathfrak{p}$ -espaces vectoriels. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 3.2.6 ci-dessus.  $\square$

Nous allons maintenant comparer  $\dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{p}B$  avec le degré de l'extension  $\text{Frac}(A) \subseteq \text{Frac}(B)$ . Pour cela, nous supposons que  $B$  est la clôture intégrale de  $A$  dans une extension finie séparable  $L$  de  $K = \text{Frac}(A)$  (proposition 3.1.3), de sorte que  $B$  soit de type fini comme  $A$ -module (2.3.4). Nous allons alors montrer que  $\dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{p}B = [L : K]$ . Nous commençons avec une forme très générale du célèbre lemme de Nakayama.

**Lemme 3.2.8** (Lemme de Nakayama). *Soient  $R$  un anneau,  $I$  un idéal de  $R$  et  $M$  un  $R$ -module de type fini. Si  $M = IM$ , alors il existe  $\alpha \in I$  tel que  $(1 + \alpha)M = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un système de générateurs de  $M$  sur  $R$ . Il existe une matrice  $D \in M_n(R)$  à coefficients dans  $I$  telle que

$${}^t(x_1, \dots, x_n) = D \cdot {}^t(x_1, \dots, x_n).$$

Donc  $(\text{Id}_n - D){}^t(x_1, \dots, x_n) = 0$ . En multipliant par la transposée de la matrice de  $\text{Id}_n - D$  on obtient  $\det(\text{Id}_n - D) \cdot {}^t(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Soit  $a = \det(\text{Id}_n - D) = 1 + \alpha \in 1 + I$ , alors  $ax_i = 0$  pour tout  $i \leq n$ , donc  $aM = 0$ .  $\square$

**Theorem 3.2.9.** *Soit  $A$  un anneau de Dedekind de corps de fractions  $K$ , soit  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans une extension finie séparable  $L/K$ . Pour tout idéal maximal  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , on a une décomposition*

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{q}_n^{e_n} \tag{3.3}$$

où  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$  sont les idéaux maximaux de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}$ , deux à deux distincts et où  $e_i$  est l'indice de ramification de  $A \subseteq B$  en  $\mathfrak{q}_i$ . De plus, on a l'égalité

$$[L : K] = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i f_i \tag{3.4}$$

où  $f_i$  est le degré de l'extension résiduelle de  $A/\mathfrak{p} \subseteq B/\mathfrak{q}_i$ .

*Démonstration.* Soit  $d = \dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{p}B$ . D'après la proposition 3.2.7 il suffit de montrer que  $[L : K] = d$ .

Soient  $b_1, \dots, b_d \in B$  dont les images dans  $B/\mathfrak{p}B$  forment une base de  $A/\mathfrak{p}$ -espace vectoriel. Il s'agit de montrer qu'ils forment une base de  $L/K$ .

(1) Génération. Soit  $N = \sum_{1 \leq j \leq d} Ab_j \subseteq B$ . Soit  $M = B/N$  (quotient de  $A$ -modules). Comme  $B \subseteq N + \mathfrak{p}B$  par l'hypothèse sur les  $b_j$ , on a  $M = \mathfrak{p}M$ . Il suit du lemme de Nakayam qu'il existe  $\alpha \in \mathfrak{p}$  tel que  $(1 + \alpha)M = 0$ . Autrement dit, comme  $1 + \alpha \neq 0$  (car  $1 \notin \mathfrak{p}$ ), on a  $B \subseteq (1 + \alpha)^{-1}N \subseteq \sum_{1 \leq j \leq n} Kb_j$ . En appliquant la proposition 2.3.1(1) avec  $C = B$ , on obtient  $L \subseteq \sum_{1 \leq j \leq n} Kb_j$ . Les  $b_1, \dots, b_d$  forment bien une famille génératrice de  $L$  sur  $K$ .

(2) Indépendance linéaire. Supposons  $\sum_{1 \leq j \leq d} a_j b_j = 0$  avec  $a_j \in K$ . On veut montrer que les  $a_j$  sont tous nuls. En chassant les dénominateurs, on peut supposer que  $a_j \in A$ . Supposons que les  $a_j$  ne sont pas tous nuls. Alors l'idéal  $I := (a_1, a_2, \dots, a_d)$  engendré par les  $a_i$  est non nul. Il se décompose en  $I = \mathfrak{p}^r J$  avec  $J$  premier à  $\mathfrak{p}$ . Cela implique que  $I \subseteq \mathfrak{p}^r$  et que  $I \not\subseteq \mathfrak{p}^{r+1}$ .

Soit  $t \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ . Soit  $s \in A \setminus \mathfrak{p}$  tel que  $s\mathfrak{p} \subseteq tA$  (proposition 3.1.28). On a  $s^r a_j \in s^r \mathfrak{p}^r \subseteq t^r A$ , donc  $s^r a_j = t^r a'_j$  avec  $a'_j \in A$ . Il suit que  $\sum_j a'_j b_j = 0$ . En passant dans  $B/\mathfrak{p}B$ , on obtient  $a'_j \in \mathfrak{p}$ . Comme  $s^r \notin \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p} + s^r A$  est un idéal qui contient strictement  $\mathfrak{p}$  et est donc égal à  $A$ . Il existe donc  $a'$  tel que  $1 = s^r a' + x$  avec  $x \in \mathfrak{q}$ , alors

$$a_j = (s^r a' + x)a_j = a' t^r a'_j + x a_j \in \mathfrak{p}^{r+1}$$

pour tous  $j \leq d$ . D'où  $I \subseteq \mathfrak{p}^{r+1}$ . Contradiction et la famille est bien libre sur  $K$ .  $\square$

**Proposition 3.2.10** (Cas galoisien). *Conservons les notations du théorème 3.2.9 et supposons l'extension  $L/K$  galoisienne. Alors  $e_i = e_j$  et  $f_i = f_j$  pour tous  $i, j \leq n$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $\sigma \in G := \text{Gal}(L/K)$ ,  $\sigma(\mathfrak{q}_i)$  est un idéal maximal de  $B$  contenant  $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ . Donc  $G$  opère sur l'ensemble des  $\mathfrak{q}_i$ . Montrons que l'action est transitive. Supposons par exemple que  $\sigma(\mathfrak{q}_2) \neq \mathfrak{q}_1$  pour tout  $\sigma \in G$ . Soit

$$x \in \mathfrak{q}_1 \setminus \cup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{q}_2).$$

Un tel  $x$  existe par le théorème des restes chinois 3.1.31 (prendre un antécédent de  $(0, 1, \dots, 1)$  par  $B \rightarrow \prod_i B/\mathfrak{q}_i$ ). Alors

$$\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) = N_{L/K}(x) \in A \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_2.$$

Donc un des conjugués de  $x$  appartient à  $\mathfrak{q}_2$ . Contradiction. Ce qui montre la transitivité de l'action.

Fixons  $r \leq n$ . Soit  $\sigma \in G$  tel que  $\sigma(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}_r$ . Comme  $\mathfrak{p}B = \sigma(\mathfrak{p}B) = \prod \sigma(\mathfrak{q}_i)^{e_i}$ , il suit de l'unicité de la décomposition que  $e_1 = e_r$ . De plus,  $\sigma$  induit un isomorphisme de  $A$ -modules  $B/\mathfrak{q}_1 \rightarrow B/\sigma(\mathfrak{q}_1) = B/\mathfrak{q}_r$  qui est *a fortiori* un isomorphisme de  $(A/\mathfrak{p})$ -espaces vectoriels. Donc  $f_1 = f_r$ .  $\square$

Nous allons donner une méthode concrète pour calculer les invariants  $e$  et  $f$  dans un cas particulier (extensions monogènes).

**Theorem 3.2.11** (Cas monogène). *Soit  $A \subseteq B$  une extension finie d'anneaux de Dedekind. Supposons que  $B = A[\theta]$  pour un certain  $\theta \in B$ . Soit  $m(X) \in A[X]$  le polynôme minimal de  $\theta$  sur  $K$ . Fixons un idéal maximal  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , et notons  $k(\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$ . Soit  $\bar{m}(X)$  la classe de  $m(X)$  dans  $k(\mathfrak{p})[X]$ . Considérons la factorisation*

$$\bar{m}(X) = \prod_{1 \leq i \leq n} h_i(X)^{r_i}, \quad r_i \geq 1$$

avec les  $h_i(X) \in k(\mathfrak{p})[X]$  unitaires irréductibles et deux à deux distincts. Soit  $H_i(X) \in A[X]$  un polynôme unitaire dont l'image dans  $k(\mathfrak{p})[X]$  est égale à  $h_i(X)$ . Alors les propriétés suivantes sont vraies.

- (1) On a un isomorphisme d'anneaux  $A[X]/(m(X)) \simeq B$ .
- (2) Soit  $\mathfrak{q}_i = H_i(\theta)B + \mathfrak{p}B$ . Alors c'est un idéal maximal de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}$  avec  $B/\mathfrak{q}_i \simeq k(\mathfrak{p})[X]/(h_i(X))$ .
- (3) Les  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$  sont deux à deux distincts et sont exactement les idéaux maximaux de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}$ .
- (4) On a  $e_i = r_i$ ,  $f_i = \deg h_i(X)$ .
- (5) La décomposition de  $\mathfrak{p}B$  est donnée par

$$\mathfrak{p}B = \prod_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{q}_i^{r_i}.$$

Avant de donner la démonstration du théorème, donnons tout de suite des exemples d'application.

**Exemple 3.2.12** Soit  $d \neq 1$  un entier sans facteur carré et  $\equiv 2, 3 \pmod{4}$ . Considérons  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ . On a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - d)$  (exemple 2.3.23). En un premier  $p > 2$  ne divisant pas  $d$ , on a

$$\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L = \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + \bar{d})$$

est soit un corps, auquel cas il y a un seul premier dans  $\mathcal{O}_L$  au-dessus de  $p$  et on a  $e = 1$ ,  $f = 2$ ; soit produit de deux copies de  $\mathbb{F}_p$  et il y a deux premiers au-dessus de  $p$  avec  $e_i = f_i = 1$ . Dans les deux cas,  $L$  est non-ramifié au-dessus de  $p$ .

En  $p = 2$ , on a  $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L = \mathbb{F}_2[X]/(X+1)^2$  ou  $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$ . Donc  $s = 1$ , et on a  $e = 2$ ,  $f = 1$ . Il suit que  $2\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}^2$  comme dans l'exemple 3.1.21.

En  $p > 2$  divisant  $d$ , on a  $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L = \mathbb{F}_p[X]/(X^2)$ . Donc situation similaire à 2 : un seul premier au-dessus de  $p$  avec  $e = 2$  et  $f = 1$ .

Pour  $p > 2$  et premier à  $d$ ,  $X^2 - d$  est soit irréductible, soit produit de deux facteurs linéaires premiers entre eux. Donc  $s = 1$  ou 2. Si  $s = 1$ , on a  $e = 1$  et  $f = 2$ . Si  $s = 2$ , on a  $e_1 = e_2 = f_1 = f_2 = 1$ .

En résumé, les nombres premiers ramifiés dans l'extension  $L$  sont 2 et les diviseurs premiers de  $d$ . Par ailleurs, le discriminant  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}} = 4d$ . Donc les

nombre premiers ramifiés sont ceux qui divisent  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}$ . Ceci n'est pas un hasard comme on va voir un peu plus loin.

**Exemple 3.2.13** Soit  $L = \mathbb{Q}[\alpha]$  engendrée par une racine  $\alpha \in \mathbb{C}$  de  $H(X) = X^5 - X - 1$ . On a vu (2.3.19) que  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\alpha]$ . Dans  $\mathbb{F}_2$ , on a la décomposition  $X^5 - X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 + X^2 + 1)$  en facteurs irréductibles. Donc au-dessus de  $2\mathbb{Z}$ , on a  $s = 2$ ,  $e_1 = 1$ ,  $f_1 = 2$  et  $e_2 = 1$ ,  $f_2 = 3$ . Cela implique d'ailleurs que  $L/\mathbb{Q}$  n'est pas galoisienne d'après la proposition 3.2.10.

*Démonstration.* (du théorème 3.2.11) (1) Par hypothèse l'homomorphisme de  $A$ -algèbres  $A[X] \rightarrow B$  défini par  $F(X) \mapsto F(\theta)$  est surjectif. Déterminons son noyau. Soit  $F(X) \in A[X]$  tel que  $F(\theta) = 0$ . Comme  $m(X) \in A[X]$  est unitaire, on peut effectuer une division euclidienne dans  $A[X]$  :

$$F(X) = m(X)Q(X) + R(X), \quad \deg R(X) < \deg m(X).$$

Il suit que  $R(\theta) = 0$ , donc  $R(X) = 0$  puisque  $m(X)$  est le polynôme minimal de  $\theta$  sur  $K$ . Donc  $F(X) \in m(X)A[X]$  et le noyau en question est égal à  $m(X)A[X]$ . Ce qui prouve (1).

(2) Rappelons que si  $I \subseteq J \subseteq R$  sont des idéaux dans un anneau  $R$ , alors on a un isomorphisme canonique  $R/J \simeq (R/I)/(J/I)$ .

On a

$$B/\mathfrak{q}_i \simeq A[X]/(m(X), H_i(X), \mathfrak{p}) \simeq k(\mathfrak{p})[X]/(h_i(X))$$

est un corps. Donc  $\mathfrak{q}_i$  est un idéal maximal de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}$  et  $k(\mathfrak{q}_i) \simeq k(\mathfrak{p})[X]/(h_i(X))$  est une extension de  $k(\mathfrak{p})$  de degré  $f_i = \deg h_i(X)$ .

(3) Soient  $i \neq j \leq n$ , montrons que  $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$ . En effet, comme  $h_i(X), h_j(X)$  sont premiers entre eux, il existe  $g_i(X), g_j(X) \in k(\mathfrak{p})[X]$  tels que  $g_i h_i + g_j h_j = 1$ . Si  $G_i(X), G_j(X) \in A[X]$  sont des polynômes qui s'envoient sur  $g_i(X), g_j(X)$  dans  $k(\mathfrak{p})[X]$ , alors

$$G_i(X)H_i(X) + G_j(X)H_j(X) = 1 + S(X), \quad S(X) \in \mathfrak{p}[X]$$

( $\mathfrak{p}[X]$  est l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathfrak{p}$ ). Si  $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_j$ , alors

$$1 + S(\theta) = G_i(\theta)H_i(\theta) + G_j(\theta)H_j(\theta) \in \mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j = \mathfrak{q}_i.$$

Or  $1 + S(\theta) \in 1 + \mathfrak{p}B \subseteq 1 + \mathfrak{q}_i$  est dans le complémentaire de  $\mathfrak{q}_i$ . Contradiction.

Il reste à montrer que tout idéal maximal  $\mathfrak{q}$  de  $B$  contenant  $\mathfrak{p}B$  est égal à un des  $\mathfrak{q}_i$ . Similairement à ce qui précède, on a

$$m(X) = \prod_{1 \leq i \leq n} H_i(X)^{r_i} + R(X)$$

avec un  $R(X) \in \mathfrak{p}[X]$ . Il suit que

$$0 = m(\theta) = \prod_{1 \leq i \leq n} H_i(\theta)^{r_i} + R(\theta), \quad R(\theta) \in \mathfrak{p}B. \quad (3.5)$$

Donc  $\prod_i H_i(\theta)^{r_i} \in \mathfrak{q}$ . Par suite,  $H_i(\theta) \in \mathfrak{q}$  pour un certain  $i \leq n$ . Cela entraîne que  $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{q}$ , donc  $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}$  puisque  $\mathfrak{q}_i$  est maximal.

(4)-(5) L'équation (3.5) ci-dessus implique que

$$\prod_{i \leq n} H_i(\theta)^{r_i} = -R(\theta) \in \mathfrak{p}B.$$

Il suit que  $\prod_i \mathfrak{q}_i^{r_i} \subseteq (\prod_i H_i(\theta)^{r_i}, \mathfrak{p}B) \subseteq \mathfrak{p}B = \prod_i \mathfrak{q}_i^{e_i}$ . L'exercice 3.3.22 montre que  $r_i \geq e_i$  pour tous  $i \leq n$ . Par ailleurs, on a

$$\sum_{i \leq n} r_i f_i = \deg \overline{m}(X) = \deg m(X) = [L : K]$$

car  $m(X)$  est le polynôme minimal de  $\theta$  sur  $K$  et que  $L = K[\theta]$  (Proposition 2.3.1). D'après le théorème 3.2.9 on a

$$\sum_i e_i f_i = \sum_i r_i f_i.$$

Comme  $r_i \geq e_i$  et  $f_i \geq 1$  pour tout  $i$ , on a  $r_i = e_i$  pour tout  $i \leq n$ .  $\square$

### 3.2.2 Ramification et discriminant

Nous allons donner un résultat qui généralise l'exemple 3.2.12 concernant la ramification. Nous conservons les hypothèses sur  $A \subseteq B$  comme au début du §3.2.

**Theorem 3.2.14.** *Supposons  $B$  libre sur  $A$  avec une base  $\varepsilon$ . Alors  $A \rightarrow B$  est ramifié au-dessus de  $\mathfrak{p}$  si et seulement si  $\mathfrak{p}$  contient  $D_{B/A}(\varepsilon)$ . En particulier, si  $A \rightarrow B$  est ramifié seulement au-dessus d'un nombre fini de  $\mathfrak{p}$ .*

*Démonstration.* Nous démontrons ce théorème dans le cas où  $B = A[\theta]$  est monogène sur  $A$  comme dans le théorème 3.2.11. Nous gardons les notations de 3.2.11. Comme le discriminant est indépendant du choix d'une base de  $B$  sur  $A$  à multiplication par des inversibles de  $A$  près, il suffit de montrer le théorème avec la base  $\{1, \theta, \dots, \theta^{d-1}\}$  où  $d = \deg m(X)$ . Notons On a  $D_{B/A}(\varepsilon) = D_{L/K}(\varepsilon) = \text{disc}(m(X))$ . Dire que l'extension  $B/A$  est non-ramifiée au-dessus de  $\mathfrak{p}$  est équivalent à  $r_i = 1$  et les  $h_i(X)$  séparables. Comme ceux-ci sont premiers entre eux, c'est encore équivalent à  $\overline{m}(X)$  séparable, c'est-à-dire que  $\text{disc}(\overline{m}(X)) \neq 0$ . Or  $\text{disc}(\overline{m}(X)) = \overline{\text{disc}(m(X))} \in A/\mathfrak{p}$ . Cela implique le théorème.

Comme  $D_{L/K}(\varepsilon) \neq 0$ , l'ensemble des  $\mathfrak{p}$  contenant  $D_{L/K}(\varepsilon)$ , égal à l'ensemble des  $\mathfrak{p}$  contenant l'idéal non nul  $D_{L/K}(\varepsilon)A$ , est fini.  $\square$

**Corollaire 3.2.15.** *Soit  $L$  un corps de nombres. Alors  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_L$  est ramifiée au-dessus de  $p\mathbb{Z}$  si et seulement si  $p \mid d_L$ , le discriminant de  $L$ .*

**Remarque 3.2.16** On verra que  $\mathbb{Z}$  n'admet aucune extension non triviale non-ramifiée au-dessus de tout nombre premier (corollaire 4.2.16). Autrement dit  $\mathbb{Z}$  est une sorte d'espace simplement connexe. Il en est de même pour l'anneau  $\mathbb{C}[X]$ , cela résulte du fait que l'espace topologique  $\mathbb{C}$  est simplement connexe.

En revanche, si  $k$  est un corps de caractéristique  $p > 0$ , l'extension finie non triviale  $A = k[t] \subset B = k[y]$  avec  $t = y^p - y$  est non-ramifiée au-dessus de tout idéal maximal de  $A$ .

### 3.3 Étude locale

Cette partie n'a pas été présentée en cours.

Soit  $A$  un anneau de Dedekind de corps de fractions  $K$ . Sa structure devient plus simple par localisation (c'est-à-dire en ajoutant des dénominateurs à  $A$ ). Typiquement, la localisation par rapport à un idéal maximal conduit à un anneau de valuation discrète.

#### 3.3.1 Localisation

Ce sous-paragraphe regroupe quelques généralités sur la localisation. La plupart d'entre elles ont été vue en TD, nous n'y reviendrons donc pas. Nous passons directement à la proposition 3.3.12 et son corollaire 3.3.13.

On supposera dans cette section que  $A$  est un anneau intègre. On note  $K$  son corps des fractions. La localisation est un procédé qui génère des  $A$ -algèbres, et qui permet entre autres d'étudier "isolément" les idéaux premiers de  $A$ .

L'exemple le plus simple de localisation est le corps des fractions  $K$  lui-même. On voit que ce procédé fabrique un anneau ayant une structure plus simple que l'anneau de départ.

**Définition 3.3.1** Une *partie multiplicative*  $S$  de  $A$  est un sous-ensemble non vide stable par multiplication. Par commodité on demandera aussi que  $1 \in S$  et  $0 \notin S$ .

**Exemple 3.3.2**  $S = A \setminus \{0\}$ , ou plus généralement,  $A \setminus \mathfrak{p}$  pour un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ ;  $\{f^n \mid n \geq 1\}$  pour un élément donné  $f \in A$ .

**Définition 3.3.3** On pose

$$S^{-1}A = \{a/s \in K \mid a \in A, s \in S\}.$$

On l'appelle la *localisation de  $A$  par rapport à  $S$* . On voit immédiatement que c'est un sous-anneau de  $K$  contenant  $A$ . L'inclusion  $A \subseteq S^{-1}A$  fait de ce dernier une  $A$ -algèbre. De plus,  $\text{Frac}(S^{-1}A) = K$ .

**Exemple 3.3.4** Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ , on note  $A_{\mathfrak{p}}$  la localisation de  $A$  par rapport à  $A \setminus \mathfrak{p}$ . En particulier,  $K = A_{\{0\}}$ . Si  $f \in A$ , on note  $A_f$  la localisation de  $A$  par rapport à  $\{f^n \mid n \geq 0\}$ . La localisation  $\mathbb{Z}_{10}$  est l'anneau des nombres décimaux.

Soit  $I$  un idéal de  $A$ . On note  $S^{-1}I$  l'ensemble  $\{a/s \mid a \in I, s \in S\}$ . C'est un idéal de  $S^{-1}A$ , égal à l'idéal de  $S^{-1}A$  engendré par la partie  $I \subset S^{-1}A$ . On note cet idéal aussi par  $I(S^{-1}A)$ .

**Proposition 3.3.5.** *Si  $A$  est noethérien, alors il en est de même pour  $S^{-1}A$ .*

*Démonstration.* Soit  $J$  un idéal de  $S^{-1}A$ . Alors  $I := J \cap A$  est un idéal de  $A$ , donc engendré par  $x_1, \dots, x_n \in I$ . Ce sont aussi des éléments de  $J$  puisque  $I \subseteq J$ . Pour tout  $x = \alpha/s \in J$ , on a  $\alpha = sx \in J \cap A = I$ . Donc  $\alpha = \sum_i a_i x_i$  avec  $a_i \in A$  et  $x = \sum_i (a_i/s)x_i$ . Ce qui montre que  $x_1, \dots, x_n$  engendrent  $J$  en tant que  $S^{-1}A$ -module. Donc  $J$  est de type fini et  $S^{-1}A$  est noethérien.  $\square$

**Proposition 3.3.6.** *Soit  $S$  une partie multiplicative de  $A$ . Les correspondances*

$$\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap A, \quad \mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$$

*établissent une bijection (réciproque l'une de l'autre) de l'ensemble des idéaux premiers de  $S^{-1}A$  avec l'ensemble des idéaux premiers de  $A$  ne rencontrant pas  $S$ .*

*Démonstration.* Notons d'abord que si  $\mathfrak{q}$  est un idéal premier de  $A_{\mathfrak{p}}$ ,  $\mathfrak{q} \cap A$  est un idéal premier de  $A$  (l'image réciproque par un homomorphisme d'anneaux d'un idéal premier est un idéal premier). De plus  $(\mathfrak{q} \cap A) \cap S = \emptyset$  car sinon, si  $s$  est dans l'intersection, on a  $s \in \mathfrak{q}$  et  $s \in (S^{-1}A)^*$ , Ce qui impliquerait que  $\mathfrak{q} = S^{-1}A$ , et ce n'est pas un idéal premier !

Inversement, si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$  avec  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ , montrons que  $S^{-1}\mathfrak{p}$  est premier dans  $S^{-1}A$ . C'est un idéal propre car  $1 = \alpha/s$  avec  $\alpha \in \mathfrak{p}$ ,  $s \in S$  implierait que  $\alpha = s \in \mathfrak{p} \cap S$ . Ensuite, si  $\alpha_1/s_1 \times \alpha_2/s_2 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ , alors  $\alpha_1\alpha_2 \in \mathfrak{p}$ , donc, par exemple  $\alpha_1 \in \mathfrak{p}$ . Il suit que  $\alpha_1/s_1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ .

Il reste à montrer que  $(S^{-1}\mathfrak{p}) \cap A = \mathfrak{p}$  et  $S^{-1}(\mathfrak{q} \cap A) = \mathfrak{q}$  pour  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  comme dans l'énoncé. On a clairement  $\mathfrak{p} \subseteq (S^{-1}\mathfrak{p}) \cap A$  et  $S^{-1}(\mathfrak{q} \cap A) \subseteq \mathfrak{q}$ .

Soit  $a = \alpha/s \in (S^{-1}\mathfrak{p}) \cap A$ . Alors  $sa = \alpha \in \mathfrak{p}$ . Comme  $s \notin \mathfrak{p}$  puisque  $S \cap \mathfrak{p}$  est vide, on a  $a \in \mathfrak{p}$ . Donc  $(S^{-1}\mathfrak{p}) \cap A \subseteq \mathfrak{p}$  et on a l'égalité. Soit  $x = \alpha/s \in \mathfrak{q}$ . Alors  $\alpha = sx \in \mathfrak{q} \cap A$  et  $x = \alpha/s \in S^{-1}(\mathfrak{q} \cap A)$ . Ce qui montre l'inclusion  $\mathfrak{q} \subseteq S^{-1}(\mathfrak{q} \cap A)$  et donc l'égalité.  $\square$

**Corollaire 3.3.7.** *Avec les notations de la proposition ci-dessus, si de plus  $\mathfrak{p}$  est un idéal maximal de  $A$ , alors  $S^{-1}\mathfrak{p}$  est un idéal maximal de  $S^{-1}A$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathfrak{p}$  est maximal, et si  $S^{-1}\mathfrak{p}$  est contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{q}$  de  $S^{-1}A$ , alors  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ , et donc  $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$  est un idéal maximal.  $\square$

**Définition 3.3.8** On dit qu'un anneau  $A$  est *local* s'il admet un unique idéal maximal. Par exemple, un corps est un anneau local. L'idéal maximal d'un anneau local contient tous les idéaux premiers.

**Exercice 3.3.9** Un anneau  $A$  est local si et seulement si  $A \setminus A^*$  est un idéal. Ce sera alors l'idéal maximal de  $A$ . Si  $I$  est un idéal de  $A$ , alors  $A \setminus I = A^*$  si et seulement si  $I$  est l'unique idéal maximal de  $A$ .

**Exemple 3.3.10** L'anneau  $\mathbb{Z}$  n'est pas local.

**Exemple 3.3.11** Soit  $A$  un anneau intègre. Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ . Alors  $A_{\mathfrak{p}}$  est un anneau local, d'idéal maximal  $S^{-1}\mathfrak{p}$ , où  $S = A \setminus \mathfrak{p}$ . En effet par

la proposition 3.3.6,  $S^{-1}\mathfrak{p}$  est un idéal premier puisque  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ . De plus, les idéaux premiers de  $A_{\mathfrak{p}}$  sont de la forme  $S^{-1}\mathfrak{p}'$  avec  $\mathfrak{p}' \cap S = \emptyset$  donc  $\mathfrak{p}' \subseteq A \setminus S = \mathfrak{p}$  et  $S^{-1}\mathfrak{p}'$  est contenu dans  $S^{-1}\mathfrak{p}$ .

Cet exemple est fondamental. À partir de  $\mathfrak{p}$ , on a construit un anneau dont les idéaux premiers correspondent à ceux de  $A$  contenus dans  $\mathfrak{p}$ . Ce qui simplifie considérablement la structure du nouvel anneau.

Il existe une explication du terme « local » provenant de la géométrie algébrique.

**Proposition 3.3.12.** *Soit  $A$  un anneau intègre et intégralement clos, alors  $S^{-1}A$  est intégralement clos.*

*Démonstration.* Soit  $x \in \text{Frac}(S^{-1}A) = \text{Frac}(A) = K$  un élément entier sur  $S^{-1}A$ . On a une relation entière

$$x^n + (a_{n-1}/s_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0/s_0) = 0, \quad a_i \in A, s_i \in S.$$

En prenant  $s = s_0 s_1 \cdots s_{n-1}$ , on obtient une relation entière de  $sx$  sur  $A$ , donc  $sx \in A$  et  $x \in S^{-1}A$ . Autrement dit,  $S^{-1}A$  est intégralement clos.  $\square$

**Proposition 3.3.13.** *Si  $A$  est un anneau de Dedekind, alors  $S^{-1}A$  est soit un corps, soit un anneau de Dedekind.*

*Démonstration.* D'après ce qui précède,  $S^{-1}A$  est intègre, intégralment close et noethérien. Enfin, tout idéal premier de  $S^{-1}A$  est de la forme  $S^{-1}\mathfrak{p}$  avec  $\mathfrak{p}$  idéal premier de  $A$ . Comme  $\mathfrak{p}$  est nul ou maximal, il en est de même pour  $S^{-1}\mathfrak{p}$  d'après 3.3.6. Si  $S^{-1}A$  n'est pas un corps, c'est alors un anneau de Dedekind.  $\square$

Un point intéressant avec la localisation est qu'elle permet de rendre un idéal principal en ajoutant juste un dénominateur.

**Exercice 3.3.14** Trouver une partie multiplicative  $S$  de  $\mathbb{Z}$ , différente de  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , telle que  $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ .

**Exercice 3.3.15** Si  $A$  est principal (resp. factoriel), montrer que  $S^{-1}A$  est principal (resp. factoriel).

### 3.3.2 Anneaux de valuation discrète

Nous avons vu que les anneaux de Dedekind locaux sont principaux (proposition 3.1.27). Une façon de construire de tels anneaux est donnée par les valuations discrètes.

**Définition 3.3.16** Soit  $K$  un corps. Une *valuation discrète* sur  $K$  est une application  $v : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$  (et on conviendra souvent que  $v$  s'étend sur  $K$  en posant  $v(0) = +\infty$ ) telle que pour tous  $a, b \in K^*$

1.  $v(ab) = v(a) + v(b)$  (c'est un homomorphisme de groupes); en particulier  $v(1) = 0$ .

2.  $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$  (si  $a + b = 0$ , il n'y a pas de condition).

On dit que la valuation est *non triviale* si  $v(K^*) \neq \{0\}$  et qu'elle est *normalisée* si  $v(K^*) = \mathbb{Z}$  (en général c'est un sous-groupe non nul de  $\mathbb{Z}$ , donc de la forme  $d\mathbb{Z}$ ). Nous n'utiliserons que les valuations non triviales dans ce cours.

**Exemple 3.3.17** Soit  $p$  un nombre premier. On a une *valuation  $p$ -adique* sur  $\mathbb{Q}$ , définie comme suit. Tout nombre rationnel  $x$  non nul s'écrit de façon unique  $a/b$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$  premiers entre eux et  $b > 0$ . On décompose  $a = p^r u$ ,  $b = p^s v$  avec  $r, s \in \mathbb{N}$  et  $u, v$  premiers à  $p$ . Alors la valuation  $p$ -adique  $v_p(x)$  est égale à  $v_p(a) - v_p(b) = r - s$ . On a  $x = p^{v_p(x)} c/d$  avec  $c, d \in \mathbb{Z}$  premiers à  $p$ .

Un corps  $K$  muni d'une valuation discrète non triviale  $v$  est appelé un *corps de valuation discrète*. L'ensemble

$$\mathcal{O}_v := \{a \in K^* \mid v(a) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

est un sous-anneau de  $K$ , appelé un *anneau de valuation discrète*, ou l'*anneau de valuation de  $(K, v)$* . Le sous-ensemble

$$\mathfrak{m}_v := \{a \in K^* \mid v(a) > 0\} \cup \{0\}$$

est un idéal de  $\mathcal{O}_v$ .

**Proposition 3.3.18.** *Un anneau  $A$  est un anneau de valuation discrète si et seulement si c'est un anneau de Dedekind local. Son idéal maximal est alors  $\mathfrak{m}_v$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $A$  est un anneau de valuation discrète. Si  $a \in A \setminus \mathfrak{m}_v$ , alors  $v(1/a) = -v(a) = 0$ , donc  $1/a \in A$  et  $a \in A^*$ . Ce qui montre que  $A$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_v$ . Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Soit  $x_0 \in I$  de valuation minimale. Alors pour tout  $x \in I$ ,  $v(x/x_0) \geq 0$ , donc  $x/x_0 \in A$  et  $I = x_0 A$ . Ce qui prouve que  $A$  est principal. La valuation étant non triviale, il existe  $a \in K$  non nul avec  $v(a) > 0$ . Donc  $a \in A$  et  $1/a \notin A$  et  $A$  n'est pas un corps.

Inversement, soit  $A$  un anneau de Dedekind local. Il est alors principal (3.1.27). Soit  $t$  un générateur de l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ . Comme  $A$  est un anneau factoriel,  $t$  est un élément premier et pour tout  $a \in A$  non nul, il existe un unique  $n \geq 0$  tel que  $a = t^n u$  avec  $u \in A \setminus tA = A^*$ . On pose  $v(a) = n$ . Cela définit une application  $A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  qui est multiplicative et qui s'étend en une valuation discrète non triviale sur  $K = \text{Frac}(A)$  (les détails sont à vérifier laissés aux ).  $\square$

La proposition suivante est un principe local-global (si une certaine propriété est vraie en localisant en tous les idéaux maximaux, alors elle est vraie globalement).

**Proposition 3.3.19.** *Soient  $I, J$  deux idéaux dans un anneau intègre  $A$ . Si  $IA_{\mathfrak{m}} \subseteq JA_{\mathfrak{m}}$  pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , alors  $I \subseteq J$ .*

*Démonstration.* Soit  $\beta \in I$  et considérons

$$H = \{a \in A \mid a\beta \in J\}.$$

C'est un idéal de  $A$ . On veut montrer que  $H = A$ , ce qui impliquera que  $1 \in H$  et donc que  $\beta \in J$ . Si  $H$  est un idéal propre, il est contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ . Comme  $IA_{\mathfrak{m}} \subseteq JA_{\mathfrak{m}}$  par hypothèse, il existe  $\alpha \in J$ ,  $s \in A \setminus \mathfrak{m}$  tels que  $\beta = \alpha/s$ . Donc  $s\beta \in J$  et  $s \in H \subseteq \mathfrak{m}$ . Mais  $s \notin \mathfrak{m}$ . Contradiction.  $\square$

**Theorem 3.3.20.** *Soit  $A$  un anneau intègre noethérien qui n'est pas un corps. Alors  $A$  est un anneau de Dedekind si et seulement si pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , la localisation  $A_{\mathfrak{m}}$  est un anneau de valuation discrète.*

*Démonstration.* Supposons vérifiée la propriété sur les localisations  $A_{\mathfrak{m}}$ . Soit  $x = a/b \in K = \text{Frac}(A)$  (avec  $a, b \in A$ ) entier sur  $A$ . Alors pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ ,  $x \in \text{Frac}(A_{\mathfrak{m}})$  est entier sur  $A_{\mathfrak{m}}$ . Ce qui montre que  $x \in A_{\mathfrak{m}}$ . Donc  $aA_{\mathfrak{m}} \subseteq bA_{\mathfrak{m}}$  pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$ . La proposition 3.3.19 montre alors que  $aA \subseteq bA$ , donc  $a \in bA$  et  $x \in A$ . Ce qui montre que  $A$  est intégralement clos.

Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier non nul de  $A$ . Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $A$  contenant  $\mathfrak{p}$ . Alors  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$  est un idéal premier non nul de  $A_{\mathfrak{m}}$  (proposition 3.3.6), donc égal à  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ . Il suit que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$  (*loc. cit.*) et  $\mathfrak{p}$  est maximal. On a donc montré que  $A$  est un anneau de Dedekind.

Inversement, si  $A$  est un anneau de Dedekind, alors  $A_{\mathfrak{m}}$  est un anneau de Dedekind local (3.3.13). On peut donc appliquer la proposition 3.1.27.  $\square$

**Remarque 3.3.21** Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal maximal de  $A$ , on peut définir une sorte d'évaluation  $v_{\mathfrak{p}}$  en  $\mathfrak{p}$  sur l'ensemble des idéaux fractionnaires de  $A$  de la façon suivante. Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Si  $\mathfrak{p}$  ne contient pas  $I$ , on pose  $v_{\mathfrak{p}}(I) = 0$ . Sinon, on pose  $v_{\mathfrak{p}}(I) = r$  l'exposant de  $\mathfrak{p}$  dans la décomposition de  $I$ . Ceci définit une application multiplicative de l'ensemble des idéaux non nuls de  $A$  dans  $\mathbb{Z}$ . Elle s'étend en un homomorphisme de groupes  $v_{\mathfrak{p}} : I(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

**Exercice 3.3.22** Soient  $I, J$  deux idéaux non nuls de  $A$ . Montrer que  $I \subseteq J$  si et seulement si  $v_{\mathfrak{p}}(I) \geq v_{\mathfrak{p}}(J)$  pour tous idéaux maximaux  $\mathfrak{p}$  de  $A$ .

## Chapitre 4

# Groupe des classes des corps de nombres

Le groupe des classes d'un anneau de Dedekind  $A$  est un groupe commutatif qui mesure en quelque sorte le défaut de  $A$  à être principal. Il est trivial si et seulement si  $A$  est principal, cf. proposition 3.1.24. Plus précisément, si  $I$  est un idéal non nul de  $A$ , et si sa classe dans  $\text{Cl}(A)$  est d'ordre fini égal à  $e$ , alors  $I^e$  est un idéal principal. Dans ce chapitre nous étudions le groupe des classes de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Nous montrons notamment que ce groupe est fini (4.1.8) et donnons aussi une borne en termes de certains invariants du corps de nombres (4.2.10).

### 4.1 Finitude du groupe des classes

Pour évaluer la taille de  $\text{Cl}(A)$  lorsque  $A$  est un anneau d'entiers, on va montrer que tout idéal fractionnaire est équivalent à un idéal de petite norme.

#### 4.1.1 Norme absolue

**Proposition 4.1.1** (et définition). *Soit  $L$  un corps de nombres. Soit  $I$  un idéal non nul de  $\mathcal{O}_L$ . Alors l'anneau quotient  $\mathcal{O}_L/I$  est fini. Son cardinal est appelé la norme de  $I$  et est noté  $N(I)$ .*

*Démonstration.* Soit  $b \in I$  non nul. Son polynôme minimal sur  $\mathbb{Q}$  appartient à  $\mathbb{Z}[X]$ , et le terme constant  $a_0$  est non nul. On a un isomorphisme  $\mathbb{Z}$ -linéaire  $\mathbb{Z}^n \simeq \mathcal{O}_L$  (corollaire 2.3.6), d'où une application surjective

$$\mathbb{Z}^n / a_0 \mathbb{Z}^n \simeq \mathcal{O}_L / a_0 \mathcal{O}_L \rightarrow \mathcal{O}_L / I$$

par composition. Comme le membre de gauche est fini (il a  $a_0^n$  éléments), celui de droite aussi.  $\square$

**Exemple 4.1.2** Lorsque  $L = \mathbb{Q}$ , on a  $I = d\mathbb{Z}$  pour un  $d \neq 0$  et donc  $N(I) = |d|$ .

**Lemme 4.1.3.** Soit  $\mathfrak{q}$  un idéal maximal de  $\mathcal{O}_L$ , soit  $p$  le générateur premier de l'idéal maximal  $\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$  et notons  $f_{\mathfrak{q}} = [\mathcal{O}_L/\mathfrak{q} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ . Alors  $N(\mathfrak{q}^r) = p^{rf_{\mathfrak{q}}}$  pour tout  $r \geq 0$  (par convention  $\mathfrak{q}^0 = \mathcal{O}_L$ ).

*Démonstration.* Le cas  $r = 1$  est immédiat. Pour tout  $r \geq 2$ , le noyau de la surjection canonique  $\mathcal{O}_L/\mathfrak{q}^r \rightarrow \mathcal{O}_L/\mathfrak{q}^{r-1}$  est égal  $\mathfrak{q}^r/\mathfrak{q}^{r-1} \simeq \mathcal{O}_L/\mathfrak{q}$  (lemme 3.2.4) qui est de cardinal  $p^{f_{\mathfrak{q}}}$ . Cela implique immédiatement le résultat recherché par récurrence sur  $r$ .  $\square$

**Proposition 4.1.4.** Soit  $L$  un corps de nombre.

(1) Soit  $I$  un idéal non nul de  $\mathcal{O}_L$  et soit

$$I = \prod_i \mathfrak{q}_i^{r_i}$$

une décomposition en produit d'idéaux maximaux (a priori non nécessairement distincts). Soit  $p_i \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathfrak{q}_i \cap \mathbb{Z} = p_i\mathbb{Z}$  et soit  $f_i = [\mathcal{O}_L/\mathfrak{q}_i : \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}]$ . Alors

$$N(I) = \prod_i p_i^{f_i r_i}.$$

(2) Si  $I, J \subseteq \mathcal{O}_L$  sont non nuls, alors  $N(IJ) = N(I)N(J)$ .

*Démonstration.* (1) En regroupant les  $\mathfrak{q}_i$ , on peut les supposer deux à deux distincts. Le théorème des restes chinois 3.1.31 implique que  $\mathcal{O}_L/I \simeq \prod_i \mathcal{O}_L/\mathfrak{q}_i^{r_i}$ , donc

$$|\mathcal{O}_L/I| = \prod_i |\mathcal{O}_L/\mathfrak{q}_i^{r_i}| = \prod_i N(\mathfrak{q}_i^{r_i}).$$

On conclut par le lemme qui précède.

(2) Quitte à admettre des exposants nuls, on peut écrire

$$I = \prod_i \mathfrak{q}_i^{r_i}, \quad J = \prod_i \mathfrak{q}_i^{s_i}.$$

Donc  $IJ = \prod_i \mathfrak{q}_i^{r_i+s_i}$ . L'égalité  $N(IJ) = N(I)N(J)$  est alors une conséquence immédiate de (1).  $\square$

**Proposition 4.1.5.** Soit  $L$  un corps de nombres, soit  $\alpha \in \mathcal{O}_L$  non nul. Alors  $N(\alpha\mathcal{O}_L) = |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)|$ .

*Démonstration.* Le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathcal{O}_L$  est libre de rang  $n := [L : \mathbb{Q}]$ . Il existe une base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathcal{O}_L$  comme  $\mathbb{Z}$ -module et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  des entiers non nuls tels que  $\{a_1 e_1, \dots, a_n e_n\}$  soit une base de  $\alpha\mathcal{O}_L$  (théorème de la base adaptée 1.3.2). Or  $\{\alpha e_1, \dots, \alpha e_n\}$  est aussi une base de  $\alpha\mathcal{O}_L$  sur  $\mathbb{Z}$ , il existe donc une matrice inversible  $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$  telle que  $(\alpha e_1, \dots, \alpha e_n)^t = U \cdot (a_1 e_1, \dots, a_n e_n)^t$ . Soit  $M$  la matrice de l'application  $[\alpha] : \mathcal{O}_L \rightarrow \mathcal{O}_L$  (multiplication par  $\alpha$ ). Alors  $M = UD$

où  $D$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $a_1, \dots, a_n$ . Par conséquent,

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| = |\det M| = |\det U| \prod_i a_i = \prod_i |a_i|.$$

D'autre part  $N(\alpha\mathcal{O}_L) = |\mathcal{O}_L/\alpha\mathcal{O}_L| = |\prod_i \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}| = |\prod_i a_i|$ . D'où la proposition.  $\square$

### 4.1.2 Application au groupe des classes

La norme absolue est une mesure sur l'ensemble des idéaux non nuls de  $\mathcal{O}_L$ . Le lemme suivant dit que l'espace des idéaux est discret.

**Lemme 4.1.6.** *Fixons un corps de nombres  $L$ . Soit  $c > 0$  un nombre réel. Alors l'ensemble des idéaux non nuls  $J$  de  $\mathcal{O}_L$  tels que  $N(J) \leq c$  est fini.*

*Démonstration.* Soit  $J = \prod_i \mathfrak{q}_i^{r_i}$  la factorisation avec  $r_i \geq 1$  et  $N(J) \leq c$ . Soit  $p_i\mathbb{Z} = \mathfrak{q}_i \cap \mathbb{Z}$ . Alors  $N(J) = \prod_i p_i^{r_i f_i} \leq c$ . Donc  $p_i \leq c$  et  $r_i \leq c$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de  $\mathfrak{q}_i$  contenant  $p_i\mathcal{O}_L$  avec  $p_i$  fixé, on voit que les ensembles des  $\mathfrak{q}_i$  et des  $r_i$  qui interviennent dans la factorisation des  $J$  de  $N(J) \leq c$  sont finis. Il n'y a donc qu'un nombre fini de  $J$  avec  $N(J) \leq c$ .  $\square$

**Lemme 4.1.7.** *Soit  $L$  un corps de nombres. Alors il existe une constante réelle  $c > 0$  avec la propriété suivante : pour tout idéal fractionnaire  $M$  de  $\mathcal{O}_L$ , il existe  $\alpha \in K^*$  et un idéal non nul  $J$  de  $\mathcal{O}_L$  tels que  $M = \alpha J$  et  $N(J) \leq c$ .*

*Démonstration.* On va montrer le lemme en trois étapes. Soit  $n = [L : \mathbb{Q}]$  et fixons une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathcal{O}_L$  sur  $\mathbb{Z}$ . C'est aussi une base de  $L$  sur  $\mathbb{Q}$ .

(A) *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ , on ait*

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\sum_i a_i e_i)| \leq c \max_i \{|a_i|^n\}. \quad (4.1)$$

Pour tous  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$ , notons  $x = \sum_i t_i e_i$ . L'application  $\mathbb{Q}$ -linéaire  $[x] : L \rightarrow L$  multiplication par  $x$  vérifie  $[x] = \sum_i t_i [e_i]$ , donc sa matrice dans une base de  $L/\mathbb{Q}$  s'écrit  $\text{Mat}([x]) = \sum_i t_i \text{Mat}([e_i])$ . Il existe donc un polynôme  $P(T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{Q}[T_1, \dots, T_n]$  tel que

$$N_{L/\mathbb{Q}}(x) = \det[x] = P(t_1, \dots, t_n)$$

pour tous  $x$ . Il existe une constante réelle  $c > 0$  telle que

$$|P(t_1, \dots, t_n)| \leq c, \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n.$$

Pour tout  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$  non nul, on prend  $a \in \mathbb{Q}$  tel que  $|a| = \max_i \{|a_i|\}$ . Alors

$$N_{L/\mathbb{Q}}(\sum_i a_i e_i) = a^n N_{L/\mathbb{Q}}(\sum_i (a_i/a) e_i) = a^n P(a_1/a, \dots, a_n/a).$$

D'où  $|N_{L/\mathbb{Q}}(\sum_i a_i e_i)| \leq c \max_i \{|a_i|^n\}$ .

(B) Pour tout idéal non nul  $J$  de  $\mathcal{O}_L$ , il existe un  $\alpha \in J$  non nul tel que  $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq cN(J)$ . Considérons l'ensemble

$$E = \left\{ \sum_i a_i e_i \in \mathcal{O}_L \mid a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq N(J)^{1/n} \right\}.$$

Alors

$$|E| = ([N(J)^{1/n} + 1]^n > N(J).$$

Donc il existe  $x, y \in E$  distincts ayant la même image dans  $\mathcal{O}_L/J$  (ce dernier a  $N(J)$  éléments). Leur différence  $\alpha \in \mathcal{O}_L$  vérifie

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq cN(J)$$

car les coordonnées de  $\alpha$  dans la base  $e_i$  appartiennent à  $[-N(J)^{1/n}, N(J)^{1/n}]$ .

(C) *Preuve du lemme.* L'idéal fractionnaire  $M^{-1}$  est équivalent à un idéal non nul  $J'$  de  $\mathcal{O}_L$  (proposition 3.1.10). Par (B), il existe  $\alpha \in J'$  non nul tel que  $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq cN(J')$ . Soit  $J = \alpha J'^{-1} \subseteq \mathcal{O}_L$ . On a  $\alpha \mathcal{O}_L = J'J$ , donc  $N(\alpha \mathcal{O}_L) = N(J')N(J)$ . Il résulte de la proposition 4.1.5 que  $N(J) = |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)|N(J')^{-1} \leq c$ . Comme  $M$  est équivalent à  $J'^{-1}$  donc à  $J$ , le lemme est prouvé.  $\square$

**Theorem 4.1.8.** *Soit  $L$  un corps de nombres. Alors  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est fini.*

*Démonstration.* D'après le lemme 4.1.7 ci-dessus, il existe une constante  $c > 0$  telle que tout idéal fractionnaire soit équivalent à un idéal non nul  $J$  de norme  $N(J) \leq c$ . Mais il n'existe qu'un nombre fini de tels  $J$  d'après le lemme 4.1.6. Donc  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est fini.  $\square$

**Corollaire 4.1.9.** *Soit  $c$  une constante donnée par le lemme 4.1.7. Alors  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est engendré par les classes des idéaux maximaux  $\mathfrak{q}$  avec  $N(\mathfrak{q}) \leq c$ . De plus, ces idéaux maximaux vérifient  $\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$  avec  $p^{f_{\mathfrak{q}}} \leq c$  où  $f_{\mathfrak{q}}$  est le degré de l'extension résiduelle  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_L$  en  $\mathfrak{q}$ .*

**Exemple 4.1.10** Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Alors  $\{1, \sqrt{2}\}$  est une base de  $\mathcal{O}_L$  sur  $\mathbb{Z}$  et la constante  $c = 2$  convient pour lemme 4.1.7. Pour déterminer  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$ , on doit donc chercher les  $\mathfrak{q}$  au-dessus de  $p = 2$ . On a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2)$ . Comme  $X^2 - 2 \equiv X^2 \pmod{2}$ , on a  $2\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}_2^2$  avec  $\mathfrak{q}_2 = (2, \sqrt{2}) = \sqrt{2}\mathcal{O}_L$  (théorème 3.2.11). Donc  $\mathfrak{q}_2$  est principal et  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L) = 1$ . Par suite  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est un anneau principal. En fait il est facile de montrer que c'est même un anneau euclidien.

**Exemple 4.1.11** Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ . On a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  car  $-5 \equiv 3 \pmod{4}$ . On voit que  $c = 6$  convient car

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(a_1 + a_2\sqrt{-5})| = |a_1^2 + 5a_2^2| \leq 6 \max\{|a_1|^2, |a_2|^2\}.$$

Il faut considérer les décompositions des idéaux  $2\mathcal{O}_L$ ,  $3\mathcal{O}_L$  et  $5\mathcal{O}_L$ . On a  $X^2 + 5 = (X + 1)^2 \in \mathbb{F}_2[X]$ ,  $X^2 + 5 = (X - 1)(X + 1) \in \mathbb{F}_3[X]$  et  $X^2 - 5 = X^2 \in \mathbb{F}_5[X]$ . Donc

$$2\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}_2^2, \quad 3\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}_{3,1}\mathfrak{q}_{3,2}, \quad 5\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}_5^2$$

avec  $\mathfrak{q}_2 = (2, \sqrt{-5} + 1)$ ,  $\mathfrak{q}_{3,1} = (3, \sqrt{-5} + 1)$ ,  $\mathfrak{q}_{3,2} = (3, \sqrt{-5} - 1)$ , et  $\mathfrak{q}_5 = (5, \sqrt{-5}) = \sqrt{-5}\mathcal{O}_L$ . Il suit que  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est engendré par les classes de  $\mathfrak{q}_2 = (2, 1 + \sqrt{-5})$  et de  $\mathfrak{q}_3 := \mathfrak{q}_{3,1}$  (noter que  $3\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}_{3,1}\mathfrak{q}_{3,2}$ , donc la classe de  $\mathfrak{q}_{3,2}$  est égale à l'inverse de la classe de  $\mathfrak{q}_3$  dans  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$ ).

On a  $1 + \sqrt{-5} \in \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 = \mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3$  et  $N(1 + \sqrt{-5}) = 6 = N(\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3)$ . Donc  $(1 + \sqrt{-5})\mathcal{O}_L \subseteq \mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3$  ont la même norme et sont donc égaux. Il suit que  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est engendré par la classe de  $\mathfrak{q}_2$  qui est d'ordre 1 ou 2 (puisque  $2\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}_2^2$ ).

Montrons que  $\mathfrak{q}_2$  n'est pas principal. S'il était engendré par  $a + b\sqrt{-5}$ , alors  $2 = N(\mathfrak{q}_2) = N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ . Ce qui n'est pas possible avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Nous concluons que  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est un groupe d'ordre 2 engendré par la classe de  $\mathfrak{q}_2$ . Comme corollaire, pour tout idéal  $J$  de  $\mathcal{O}_L$ ,  $J^2$  est principal.

**Remarque 4.1.12** En dehors des anneaux d'entiers d'un corps de nombres, il y a d'autres cas où la finitude est valide : si  $A$  est un anneau de Dedekind qui est fini sur un anneau de polynômes  $F[X]$  à coefficients dans un corps fini  $F$ , alors on peut montrer que  $\text{Cl}(A)$  est fini.

Mais en général le groupe des classes d'un anneau de Dedekind n'est pas fini. On peut en donner des contre-exemples avec des courbes elliptiques  $E$  sur  $\mathbb{C}$ . Il s'agit d'anneaux du type

$$A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 + X^3 + aX + b)$$

avec  $a, b \in \mathbb{C}$  fixés et vérifiant  $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ . On peut montrer que  $A$  est un anneau de Dedekind (exercice) et que  $\text{Cl}(A)$  a toujours des éléments d'ordre infini (en utilisant des outils de géométrie algébrique).

## 4.2 Borne de Minkowski

Le théorème de finitude 4.1.8, s'il est suffisant pour l'aspect théorique, ne permet pas de déterminer le groupe des classes de façon efficace. Le corollaire 4.1.9 fournit une méthode plus concrète, mais la constante  $c$  n'est pas toujours aisée à trouver ni optimale. Dans ce paragraphe, nous allons présenter une nette amélioration par la borne de Minkowski (théorème 4.2.10). La méthode de Minkowski (lemme 4.2.5) est à l'origine d'une branche de théorie des nombres appelée la géométrie des nombres.

### 4.2.1 Rudiments sur les réseaux

Dans toute cette partie, on fixe un entier  $n \geq 1$  et on note  $V = \mathbb{R}^n$  et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sa base canonique.

**Définition 4.2.1** Un *réseau* dans  $V$  est un sous- $\mathbb{Z}$ -module libre  $\Lambda$  de  $V$ , de rang  $n$  et contenant une base vectorielle de  $V$ . De façon équivalente,  $\Lambda$  est un sous- $\mathbb{Z}$ -module de  $V$  engendré par une base de  $V$ .

Par exemple,  $\mathbb{Z}^2$  est un réseau dans  $\mathbb{R}^2$ , mais  $\mathbb{Z}(1, 0) + \mathbb{Z}(\sqrt{2}, 0)$ , bien que libre de rang 2 sur  $\mathbb{Z}$ , n'est pas un réseau.

**Remarque 4.2.2** Tout réseau  $\Lambda$  de  $V$  est *discret* : c'est-à-dire que pour tout point  $v \in \Lambda$ , il existe un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $v$  dans  $V$  tel que  $\Omega \cap \Lambda = \{v\}$ . En effet, par translation, il suffit de montrer cette propriété pour  $v = 0 \in V$ . Soit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  une base de  $\Lambda$  (en tant que  $\mathbb{Z}$ -module), donc une base vectorielle de  $V$ . Par l'équivalence des normes sur  $V$ , il existe une constante  $\delta > 0$  telle que

$$\left\| \sum_i x_i \varepsilon_i \right\|_e \geq \delta \max_i \{|x_i|\}$$

où  $\|\cdot\|_e$  désigne la norme euclidienne. On obtient le résultat désiré en prenant  $\Omega = \{x \in V \mid \|x\|_e < \delta\}$ .

Si  $\Lambda$  est un réseau avec une base  $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ , on définit un *domaine fondamental* (dépendant du choix d'une base)

$$F(\Lambda, \underline{\varepsilon}) = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \varepsilon_i \mid x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq x_i < 1 \right\} \subset V.$$

Notons qu'un domaine fondamental induit une partition de  $V$  :

$$V = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (F(\Lambda, \underline{\varepsilon}) + \lambda),$$

et chaque morceau  $F(\Lambda, \underline{\varepsilon}) + \lambda$  contient un et un seul vecteur de  $\Lambda$ .

**Lemme 4.2.3.** *On fixe une base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$  qui permet d'identifier  $V$  à  $\mathbb{R}^n$ . Avec les notations ci-dessus, on a les propriétés suivantes.*

- (1) *L'ensemble  $F(\Lambda, \underline{\varepsilon})$  est mesurable, son volume est égal à  $|\det M|$  où  $M$  est la matrice des  $\varepsilon_i$  dans la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .*
- (2) *Le volume  $v(F(\Lambda), \underline{\varepsilon})$  ne dépend pas du choix d'une base  $\underline{\varepsilon}$  de  $\Lambda$ .*

*Démonstration.* (1) Soit  $T$  l'automorphisme linéaire

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_i x_i \varepsilon_i.$$

On a  $T([0, 1]^n) = F(\Lambda, \underline{\varepsilon})$ . Le volume du domaine fondamental est donné par

$$\int_{F(\Lambda, \underline{\varepsilon})} dy_1 \dots dy_n = \int_{[0, 1]^n} |\det T| dx_1 \dots dx_n = |\det T|$$

(changement de variables). Or  $M$  est aussi la matrice de l'endomorphisme  $T$  dans la base canonique, donc le volume de  $F(\Lambda, \underline{\varepsilon})$  est égal à  $|\det M|$ .

(2) Si on change la base  $\underline{\varepsilon}$  en  $\underline{\varepsilon}'$ , le quotient  $\det T / \det T'$  est égal au déterminant de la matrice de passage qui vaut  $\pm 1$ . Donc  $|\det T| = |\det T'|$ .  $\square$

**Définition 4.2.4** On notera  $\text{vol}(\Lambda)$  le volume de  $F(\Lambda, \underline{\varepsilon})$ . C'est le *volume du réseau*  $\Lambda$ . Il est indépendant du choix d'une base de  $\Lambda$ .

**Lemme 4.2.5** (Minkowski). *Soit  $\Delta$  une partie convexe compacte de  $V$ , symétrique par rapport à l'origine (c'est-à-dire  $v \in \Delta \implies -v \in \Delta$ ; ce qui implique que  $\Delta$  contient l'origine 0 s'il est non vide). Supposons  $\text{vol}(\Delta) \geq 2^n \text{vol}(\Lambda)$ . Alors  $\Lambda \cap \Delta \neq \{0\}$ .*

*Démonstration.* Fixons un domaine fondamental  $F := F(\Lambda, \underline{\varepsilon})$ . On suppose d'abord  $\text{vol}(\Delta) > 2^n \text{vol}(\Lambda)$ . Posons

$$\Delta/2 = \{x/2; x \in \Delta\}.$$

Elle a pour volume  $\text{vol}(\Delta/2) = \text{vol}(\Delta)/2^n > \text{vol}(\Lambda)$  et se découpe en une réunion disjointe

$$\Delta/2 = \coprod_{\lambda \in \Lambda} [(F + \lambda) \cap \Delta/2].$$

Il suit que

$$\text{vol}(\Delta/2) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \text{vol}((F + \lambda) \cap \Delta/2) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \text{vol}(F \cap (\Delta/2 - \lambda)).$$

Par conséquent, si les parties  $\Delta/2 - \lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , étaient deux à deux disjointes, alors

$$\text{vol}(\Delta/2) = \text{vol}(\cup_{\lambda \in \Lambda} (F \cap (\Delta/2 - \lambda))) = \text{vol}(F \cap (\cup_{\lambda \in \Lambda} (\Delta/2 - \lambda))) \leq \text{vol}(F)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Il existe donc  $\lambda, \mu \in \Lambda$  distincts tels que  $(\Delta/2 - \lambda) \cap (\Delta/2 - \mu) \neq \emptyset$ . Donc il existe  $x, y \in \Delta$  tels que  $x/2 - \lambda = y/2 - \mu$ , et donc

$$\lambda - \mu = (x - y)/2.$$

Or  $\Delta$  est symétrique et convexe, on a  $-y \in \Delta$  et  $(x - y)/2 \in \Delta$ . Donc  $\lambda - \mu \in \Lambda \cap \Delta$  et est non nul.

Supposons maintenant  $\text{vol}(\Delta) = 2^n \text{vol}(\Lambda)$ . Soit  $m > 0$  un entier. Alors on peut appliquer le résultat qu'on vient de montrer à  $(1 + 1/m)\Delta$  car ce dernier est convexe, symétrique par rapport à l'origine, et son volume vérifie

$$\text{vol}((1 + 1/m)\Delta) = (1 + 1/m)^n \text{vol}(\Delta) > 2^n \text{vol}(\Lambda).$$

Donc  $(1 + 1/m)\Delta \cap \Lambda$  contient au moins deux points. Comme  $\Lambda$  est discret (remarque 4.2.2) et que  $(1+1/m)\Delta$  est compact, cette intersection est un espace topologique compact et discret, donc fini (voir aussi lemme 5.2.3). Quand  $m$  croît vers l'infini, les

$$(1 + 1/m)\Delta \cap \Lambda$$

sont des ensembles décroissants, finis (avec au moins deux éléments), donc stationnaires. Leur intersection est égale  $\Delta \cap \Lambda$  et contient au moins deux éléments, en particulier un élément différent de 0.  $\square$

**Exercice 4.2.6** Soit  $p$  un nombre premier  $\equiv 1 \pmod{4}$ . On veut montrer que  $p$  est somme de deux carrés.

1. Montrer qu'il existe  $u \in \mathbb{F}_p^*$  d'ordre 4.
2. Soit  $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{F}_p$ ,  $(x, y) \mapsto \overline{(x - uy)}$ . Montrer que  $\Lambda := \ker \varphi$  est un réseau dans  $\mathbb{R}^2$ , de volume  $p$ .
3. Soit  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  le disque fermé centré en l'origine et de rayon  $r = \sqrt{3p/2}$ . Montrer qu'il existe  $a, b \in \Lambda$  tels que  $0 < a^2 + b^2 < 3p/2$ .
4. Montrer que  $a^2 + b^2 = p$  (montrer que  $a^2 + b^2 \in p\mathbb{N}$  en utilisant la définition de  $\Lambda$ ). Cela se démontre également avec l'anneau des entiers de Gauss  $\mathbb{Z}[i]$ .

### 4.2.2 Applications aux corps de nombres

On fixe un corps de nombres  $L$  de degré  $n = [L : \mathbb{Q}]$ , de *discriminant*  $d_L := D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}$  (voir 2.3.8). Soient  $r_1, 2r_2$  les nombres de plongements réels et imaginaires (définition 2.3.10). On sait que  $n = r_1 + 2r_2$  (proposition 2.3.11).

Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$  les plongements réels et  $\sigma_{r_1+1}, \bar{\sigma}_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \bar{\sigma}_{r_1+r_2}$  les plongements imaginaires. On a alors un homomorphisme d'anneaux injectif et  $\mathbb{Q}$ -linéaire

$$\rho : L \rightarrow V := \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}, \quad x \mapsto (\sigma_1(x), \dots, \sigma_{r_1}(x), \sigma_{r_1+1}(x), \dots, \sigma_{r_1+r_2}(x)).$$

On considère  $V$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (de dimension  $n$ ) en utilisant l'identification de  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2 : x + iy \mapsto (x, y)$ .

**Lemme 4.2.7.** *Soit  $J$  un idéal non nul de  $\mathcal{O}_L$ . Alors  $\rho(J)$  est un réseau dans  $V$ , de volume*

$$\text{vol}(\rho(J)) = 2^{-r_2} N(J) |d_L|^{1/2}.$$

*Démonstration.* L'idéal  $J$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini et sans torsion, donc libre de rang fini. Comme  $\mathcal{O}_L/J$  est fini (proposition 4.1.1),  $J$  a le même  $\mathbb{Z}$ -rang que  $\mathcal{O}_L$  (utiliser le théorème des bases adaptées 1.3.2), c'est-à-dire  $n$ . Soit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  une base de  $J$  sur  $\mathbb{Z}$ . Soit  $M$  la matrice des  $\rho(\varepsilon_i)$  dans la base canonique de  $V$ . On va montrer que

$$|\det M| = 2^{-r_2} N(J) |d_L|^{1/2}.$$

En particulier on aura  $\det M \neq 0$ , ce qui montrera que  $\rho(\varepsilon_1), \dots, \rho(\varepsilon_n)$  est libre sur  $\mathbb{R}$  et donc que  $\rho(J)$  est un réseau dans  $V$  dont le volume est comme prédit (lemme 4.2.3 et définition 4.2.4).

Considérons les vecteurs lignes de la matrice  $M$  : pour  $i \leq r_1$ ,

$$L_i = (\sigma_i(\varepsilon_1), \dots, \sigma_i(\varepsilon_n)) \in V$$

et pour  $r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2$ ,

$$L'_j = (\text{Re}(\sigma_j(\varepsilon_1)), \dots, \text{Re}(\sigma_j(\varepsilon_n)))$$

$$L''_j = (\text{Im}(\sigma_j(\varepsilon_1)), \dots, \text{Im}(\sigma_j(\varepsilon_n))).$$

Le déterminant de  $M$  ne change pas si, pour tout  $j \geq r_1 + 1$ , on remplace  $L'_j$  par

$$L_j := L'_j + \sqrt{-1}L''_j = (\sigma_j(\varepsilon_1), \dots, \sigma_j(\varepsilon_n)).$$

Maintenant dans la nouvelle matrice, on remplace  $L''_j$  par

$$\bar{L}_j = L_j - 2\sqrt{-1}L''_j = (\bar{\sigma}_j(\varepsilon_1), \dots, \bar{\sigma}_j(\varepsilon_n)).$$

On obtient alors une nouvelle matrice  $D$  avec  $\det D = (-2\sqrt{-1})^{r_2} \det M$ . Par ailleurs, l'ensemble  $\text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{Q})$  des plongements de  $L$  dans  $\mathbb{Q}$  est égal à

$$\{\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \bar{\sigma}_{r_1+1}, \dots, \bar{\sigma}_{r_1+r_2}\},$$

et la matrice  $D$  est celle qui permet de calculer le discriminant

$$D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\underline{\varepsilon}) = (\det D)^2$$

(théorème 2.2.22 et remarque 2.3.7). Il suit que  $|\det M| = 2^{-r_2} |D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\underline{\varepsilon})|^{1/2}$ . Il ne reste plus qu'à comparer  $D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\underline{\varepsilon})$  avec  $d_L$ .

Le théorème des bases adaptées 1.3.2 dit qu'il existe une base  $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$  de  $\mathcal{O}_L$  sur  $\mathbb{Z}$  et des  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  non nuls tels que  $a_1\varepsilon'_1, \dots, a_n\varepsilon'_n$  soit une base de  $J$ . Il suit que

$$D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\underline{\varepsilon}) = D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\{a_1\varepsilon'_1, \dots, a_n\varepsilon'_n\}) = (a_1 \dots a_n)^2 D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\underline{\varepsilon}').$$

Par ailleurs,  $\mathcal{O}_L/J \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$ , donc  $N(J) = |a_1 \dots a_n|$ . D'où

$$D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\underline{\varepsilon}) = N(J)^2 d_L.$$

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 4.2.8.** *Soit  $V = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$  comme ci-dessus. Pour tout nombre réel  $t > 0$ , on pose*

$$\Delta_t = \left\{ (x_1, \dots, x_{r_1}, z_1, \dots, z_{r_2}) \in V \mid \sum_i |x_i| + 2 \sum_j |z_j| \leq t \right\}.$$

*C'est une partie convexe compacte de  $V$ , symétrique par rapport à l'origine. Son volume vaut*

$$\text{vol}(\Delta_t) = 2^{r_1} (\pi/2)^{r_2} t^n / n!.$$

*Démonstration.* Seul le calcul du volume est non trivial. On se ramène par homothétie à  $t = 1$ . Ensuite il y a un calcul explicite assez long. Le résultat est admis. <sup>1</sup>  $\square$

**Lemme 4.2.9.** (Inégalité arithmético-géométrique) *Soient  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  des nombres réels. Alors*

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

*Démonstration.* On passe au logarithme. L'inégalité est alors une conséquence immédiate de la concavité de la fonction  $\ln x$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui donne une majoration explicite de la constante  $c$  qui apparaît dans le lemme 4.1.7.

<sup>1</sup>On peut trouver une preuve dans Pierre Samuel : Théorie algébrique des nombres, pp 79-80, ou James Milne : Algebraic Number Theory (en ligne), Lemma 4.22.

**Theorem 4.2.10.** *Soit  $L$  un corps de nombres de degré  $n$ . Soit*

$$C_L = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n}$$

la constante de Minkowski de  $L$ . Alors tout idéal fractionnaire de  $\mathcal{O}_L$  est équivalent à un idéal  $J'$  de norme

$$N(J') \leq C_L |d_L|^{1/2}.$$

*Démonstration.* Soit  $M$  un idéal fractionnaire. Alors  $M^{-1}$  est équivalent à un idéal non nul  $J \subseteq \mathcal{O}_L$ . On conserve les notations du lemme 4.2.8 ci-dessus et on choisit  $t$  de sorte que

$$\text{vol}(\Delta_t) = 2^n \text{vol}(\rho(J)).$$

D'après les lemmes 4.2.7 et 4.2.8, cette égalité équivaut à

$$t^n = (4/\pi)^{r_2} n! N(J) |d_L|^{1/2} = n^n N(J) C_L |d_L|^{1/2}.$$

Fixons  $t$  avec cette condition. D'après le lemme 4.2.5, il existe  $\alpha \in J$  non nul tel que  $\rho(\alpha) \in \Delta_t$ , c'est-à-dire que

$$|\sigma_1(\alpha)| + \cdots + |\sigma_{r_1}(\alpha)| + 2|\sigma_{r_1+1}(\alpha)| + \cdots + 2|\sigma_{r_1+r_2}(\alpha)| \leq t.$$

Par l'inégalité arithmético-géométrique 4.2.9, on a

$$|\sigma_1(\alpha)| \cdots |\sigma_{r_1}(\alpha)| \cdot |\sigma_{r_1+1}(\alpha)|^2 \cdots |\sigma_{r_1+r_2}(\alpha)|^2 \leq (t/n)^n = t^n/n^n.$$

Or le membre de gauche est égal à  $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)|$  (théorème 2.2.17) et celui de droite est égal à  $N(J)C_L|d_L|^{1/2}$  par le choix de  $t$ . Par suite,  $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq N(J)C_L|d_L|^{1/2}$ . Il suit que

$$N(\alpha J^{-1}) \leq C_L |d_L|^{1/2}$$

avec  $\alpha J^{-1} \subseteq \mathcal{O}_L$  équivalent à  $M$ . □

**Remarque 4.2.11** Comme pour le corollaire 4.1.9, le théorème dit que le groupe des classes  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est engendré par les classes des idéaux maximaux  $\mathfrak{q}$  vérifiant  $N(\mathfrak{q}) \leq C_L |d_L|^{1/2}$ . Soit  $p\mathbb{Z} = \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$ , alors l'inégalité veut dire  $p^f \leq C_L |d_L|^{1/2}$ , où  $f = f_{\mathfrak{q}/p\mathbb{Z}}$ . Donc les idéaux  $\mathfrak{q}$  sont à chercher parmi les idéaux maximaux au-dessus des premiers  $p$  tels que  $p^f \leq C_L |d_L|^{1/2}$ .

**Exemple 4.2.12** Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ . On a  $-5 \equiv 3 \pmod{4}$ , donc  $d_L = -20$  (exemple 2.3.23). On a

$$C_L |d_L|^{1/2} = (4/\pi)(2!/2^2)\sqrt{20} = 2,8\dots$$

Il suit que  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est engendré par les classes des idéaux de norme  $\leq 2,8$ , donc de norme  $\leq 2$ . On est ainsi passé de  $c = 6$  de l'exemple 4.1.11 à  $c = 2$ . La dernière partie de 4.1.11 montre que  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est engendré par la classe de  $\mathfrak{q}$  et que  $h_L = 2$ .

**Exemple 4.2.13** Considérons  $L = \mathbb{Q}[\alpha]$  où  $\alpha$  est une racine de  $X^3 - X - 1$ . Ce polynôme est irréductible dans  $\mathbb{F}_2[X]$ , donc irréductible sur  $\mathbb{Q}$ . Son discriminant vaut  $-23$  et est sans facteur carré. Il suit que  $d_L = D_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}}(\{1, \alpha, \alpha^2\}) = -23 < 0$  (proposition 2.3.17). Comme  $r_1 + 2r_2 = 3$ , on a  $r_2 = 1$  (proposition 2.3.15). Donc

$$C_L |d_L|^{1/2} = (4/\pi)(3!/27)\sqrt{23} = 1.35\dots < 2.$$

Tout idéal fractionnaire de  $\mathcal{O}_L$  est équivalent à un idéal non nul  $J$  de  $\mathcal{O}_L$  avec  $N(J) < 2$ , donc  $N(J) = 1$  et  $J = \mathcal{O}_L$ . Par conséquent  $h_L = 1$ .

**Exemple 4.2.14** Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-19}]$ . On va montrer que  $h_L = 1$ . Donc  $\mathcal{O}_L$  est un anneau principal. On sait par ailleurs (5.1.5) qu'il n'est pas euclidien. Comme  $-19 \equiv 1 \pmod{4}$ , on a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\alpha]$  où  $\alpha = (1 + \sqrt{-19})/2$  est racine du polynôme  $X^2 - X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$ . On a donc  $d_L = -19$  et

$$C_L |d_L|^{1/2} = (4/\pi)(2!/2^2)\sqrt{19} = 2,77\dots < 3$$

Comme  $X^2 - X + 5 \equiv X^2 + X + 1 \pmod{2}$  est irréductible dans  $\mathbb{F}_2[X]$ ,  $2\mathcal{O}_L$  est maximal et est principal. Donc  $h_L = 1$ .

**Exemple 4.2.15** Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-163}]$ . On va montrer que  $h_L = 1$ . On a  $-163 \equiv 1 \pmod{4}$ . Donc  $d_L = -163$ . Il faut considérer les premiers

$$p \leq C_L \sqrt{163} = 2\sqrt{163}/\pi = 8,12\dots,$$

donc  $p = 2, 3, 5$  ou  $7$ . On a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\alpha]$  avec le polynôme minimal de  $\alpha$  égal à  $X^2 + X + 41$ . On vérifie que ce polynôme n'a pas de racine dans  $\mathbb{F}_p$  pour  $p \leq 7$ . Il suit que tout  $\mathfrak{q}$  au-dessus de  $p \leq 7$  est principal, engendré par  $p$ . Donc  $\mathcal{O}_L$  est principal.

**Corollaire 4.2.16.** Soit  $L$  un corps de nombres de degré  $n$ .

- (1) On a  $|d_L| \geq \pi^n/4$ .
- (2) (Hermite-Minkowski) Si  $L/\mathbb{Q}$  est non-ramifiée, alors  $L = \mathbb{Q}$ .

*Démonstration.* (1) On peut supposer  $n \geq 2$ . D'après 4.2.10 il existe  $\alpha \in \mathcal{O}_L$  non nul tel que  $1 \leq |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq C_L |d_L|^{1/2}$ . Donc

$$|d_L| \geq (\pi/4)^{2r_2} n^{2n} / (n!)^2 \geq a_n := (\pi/4)^n n^{2n} / (n!)^2.$$

On a  $a_2 = \pi^2/4$  et  $a_{n+1}/a_n = (\pi/4)(1 + 1/n)^{2n}$ . Or  $(1 + 1/n)^n = 1 + 1 + \dots \geq 2$  par la formule du binôme. Donc  $(1 + 1/n)^{2n} \geq 4$ . D'où  $a_{n+1}/a_n \geq \pi$  et

$$a_n \geq (\pi^2/4)\pi^{n-2} = \pi^n/4.$$

(2) Il suit de (1) que si  $n \geq 2$ ,  $|d_L| \geq 3$ . Donc  $|d_L| = 1$  (ce qui équivaut à  $L/\mathbb{Q}$  non-ramifiée, théorème 3.2.14) implique que  $n = 1$  et  $L = \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Remarque 4.2.17** Quand  $n = [L : \mathbb{Q}]$  tend vers l'infini, la formule de Stirling dit que  $n!/n^n \simeq \sqrt{2\pi} \sqrt{n} e^{-n}$ .

**Exemple 4.2.18** L'extension  $L := \mathbb{Q}[\sqrt{-1}, \sqrt{-5}]$  de  $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$  est non-ramifiée. En effet,  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ , et  $\alpha := (\sqrt{-1} + \sqrt{-5})/2 \in L$  est zéro du polynôme  $X^2 - \sqrt{-5}X - 1 \in \mathcal{O}_K[X]$  et le discriminant de  $L/K$  dans la base  $\{1, \alpha\}$  vaut  $\text{disc}(X^2 - \sqrt{-5}X - 1) = -1$ .

**Exercice 4.2.19** Montrer que  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$  est l'unique extension de  $\mathbb{Q}$  avec  $|d_L| = 3$ .

**Exercice 4.2.20** Calculer  $h_L$  pour  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-6}]$  et trouver un générateur du groupe des classes.

**Exercice 4.2.21** Soit  $L$  un corps de nombres.

1. Soit  $\mathfrak{q}$  un maximal dont la classe dans  $\text{Cl}(\mathcal{O}_L)$  est d'ordre  $m \geq 1$ . Montrer qu'il existe une extension  $F/L$  de degré  $m$  telle que  $\mathfrak{q}\mathcal{O}_F$  soit principal.
2. Montrer qu'il existe une extension finie  $H/L$  telle que pour tout idéal  $I$  de  $\mathcal{O}_L$ ,  $I\mathcal{O}_H$  est principal. En prenant la clôture galoisienne, on peut même supposer  $H$  galoisienne sur  $K$ .

**Exercice 4.2.22** Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ .

1. Montrer que  $L/\mathbb{Q}$  est ramifiée au-dessus de 2 et que  $2\mathcal{O}_L = \mathfrak{q}^2$  avec  $\mathfrak{q}$  maximal. Calculer  $N(\mathfrak{q})$  et trouver un générateur de  $\mathfrak{q}$ .
2. Montrer que  $\mathcal{O}_L$  est principal.



## Chapitre 5

# Les unités des anneaux d'entiers

Dans l'étude d'un anneau d'entiers ou plus généralement d'un anneau de Dedekind  $A$ , nous nous sommes intéressés jusqu'à présent aux idéaux. Il y a un autre objet important que ne voient pas les idéaux, ce sont les *unités*, c'est-à-dire les éléments inversibles de l'anneau. Les unités de  $A$  forment un groupe commutatif, appelé le *groupe des unités*, et que nous noterons  $U(A)$ .

Ce chapitre est consacré au théorème de Dirichlet qui décrit la structure de ces groupes dans le cas des anneaux d'entiers d'un corps de nombres.

### 5.1 Quelques exemples

**Exemple 5.1.1** Le cas le plus simple :  $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ .

**Proposition 5.1.2.** *Soit  $L$  un corps de nombres. Soit  $\alpha \in \mathcal{O}_L$ . Alors  $\alpha \in U(\mathcal{O}_L)$  si et seulement si  $N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$ .*

*Démonstration.* Si  $\alpha$  est inversible dans  $\mathcal{O}_L$ , alors  $N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)$  est inversible dans  $\mathbb{Z}$ , donc égal à  $\pm 1$ . Inversement, supposons que  $N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$ . Soient  $K = \mathbb{Q}[\alpha]$  et  $d = [L : K]$ . Alors

$$N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = N_{K/\mathbb{Q}}(N_{L/K}(\alpha)) = N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^d) = N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)^d$$

et on en déduit que  $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$ . Le polynôme minimal de  $\alpha$

$$m_\alpha(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$$

est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (proposition 2.2.14) et  $a_0 = (-1)^m N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$  (proposition 2.2.9). Comme  $\alpha(\alpha^{n-1} + \cdots + a_1) = \pm 1$ , on voit que  $\alpha$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , donc inversible dans  $\mathcal{O}_L$ .  $\square$

**Exemple 5.1.3** Notons  $\mu(L)$  l'ensemble des éléments de  $L$  qui sont des racines de l'unité. Alors  $\mu(L) \subseteq U(\mathcal{O}_L)$ . En effet si  $\zeta^k = 1$  pour un entier  $k \geq 1$ , alors  $\zeta$  est entier sur  $\mathbb{Z}$ , donc appartient à  $\mathcal{O}_L$ . De plus  $\zeta^{-1} \in L$  est aussi une racine de l'unité, donc appartient à  $\mathcal{O}_L$ , d'où  $\mu(L) \subseteq U(\mathcal{O}_L)$ .

**Exemple 5.1.4** (*Unités quadratiques imaginaires*) Soit  $d > 0$  un entier sans facteur carré. Soit  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ .

1. Supposons  $d \equiv 1$  ou  $2 \pmod{4}$ . Alors  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ . Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Alors  $N_{L/\mathbb{Q}}(a + b\sqrt{-d}) = a^2 + b^2d$ . On cherche  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $a^2 + b^2d = 1$ .
  - (a) Si  $d = 1$ , les solutions sont  $(\pm 1, 0)$  et  $(0, \pm 1)$ . Donc  $U(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) = \{\pm 1, \pm \sqrt{-1}\}$ .
  - (b) Si  $d \geq 2$ , alors  $U(\mathcal{O}_L) = \{\pm 1\}$ .
2. Supposons  $d \equiv 3 \pmod{4}$ . Alors  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\alpha]$  où  $\alpha = (1 + \sqrt{-d})/2$ . Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , on a

$$N_{L/\mathbb{Q}}(a + b\alpha) = a^2 + ab + b^2(d+1)/4 = (a + b/2)^2 + b^2d/4 \geq 0.$$

Les seules solutions pour  $N_{L/\mathbb{Q}}(a + b\alpha) = \pm 1$  sont, lorsque  $d > 3$ ,  $a = \pm 1$  et  $b = 0$ . Donc  $U(\mathcal{O}_L) = \{\pm 1\}$ . Pour  $d = 3$ , on trouve des solutions supplémentaires :  $U(\mathcal{O}_L) = \{\pm 1, \pm(1 \pm \sqrt{-3})/2 = \pm e^{\pm 2i\pi/3}\}$ .

En résumé,  $U(\mathcal{O}_L) = \mu(L)$  pour les extensions quadratiques imaginaires.

**Remarque 5.1.5** (Pas fait en cours) Soit  $A$  un anneau euclidien avec un stathme

$$v : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Alors il existe  $\alpha \in A \setminus (\{0\} \cup A^*)$  tel que la surjection canonique  $A \rightarrow A/\alpha A$  induise une application surjective  $A^* \cup \{0\} \rightarrow A/\alpha A$ . Il suffit pour cela de prendre  $\alpha \in A \setminus (\{0\} \cup A^*)$  avec  $v(\alpha)$  minimal : pour tout  $a \in A$ , on a  $a = \alpha q + r$  avec  $q, r \in A$  et  $v(r) < v(\alpha)$ . Donc  $r = 0$  ou  $r \in A^*$  et on a  $a \equiv r \pmod{\alpha}$ .

Cette propriété permet de montrer que  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[(-1 + \sqrt{-19})/2]$  n'est pas euclidien. En effet,  $\mathcal{O}_L^* = \{\pm 1\}$ . Si  $\mathcal{O}_L$  est euclidien, il existe  $\alpha \in \mathcal{O}_L$  non nul et non inversible tel que  $\mathcal{O}_L/\alpha\mathcal{O}_L$  possède au plus 3 éléments. C'est donc un corps, isomorphe à  $\mathbb{F}_2$  ou  $\mathbb{F}_3$  et  $\alpha\mathcal{O}_L$  est un idéal maximal de  $\mathcal{O}_L$  au-dessus de 2 ou 3. En particulier  $\alpha\mathcal{O}_L$  contient  $2\mathcal{O}_L$  ou  $3\mathcal{O}_L$ . Or on a vu que  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 5)$  (exemple 4.2.14) et  $\mathcal{O}_L/2\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L/3\mathcal{O}_L$  sont des corps (car  $X^2 + X + 5$  est irréductible dans  $\mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_3$ ), isomorphe à  $\mathbb{F}_4$  et  $\mathbb{F}_9$ . Donc  $\alpha\mathcal{O}_L = 2\mathcal{O}_L$  ou  $3\mathcal{O}_L$  avec  $|\mathcal{O}_L/\alpha\mathcal{O}_L| \geq 4$ . Contradiction.

**Exemple 5.1.6** Si la situation des extensions quadratiques imaginaires est très limpide, le cas réel est plus... complexe et plus intéressant. Considérons  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . On a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . Il faut donc chercher  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1. \tag{5.1}$$

C'est une *équation de Pell-Fermat*. Elle est équivalente à  $N_{L/\mathbb{Q}}(a + b\sqrt{2}) = \pm 1$ .

On a  $\alpha_0 = 1 + \sqrt{2}$  qui est de norme  $N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha_0) = -1$ . C'est donc une unité de  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  et on a

$$\{\pm\alpha_0^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq U := U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]).$$

Montrons qu'on a ainsi toutes les unités de  $\mathcal{O}_L$ . On va d'abord montrer que

$$U \cap ]1, \alpha_0[ = \emptyset. \quad (5.2)$$

Soit  $\alpha = a + b\sqrt{2}$  une unité dans cet intervalle ouvert.

$$1 < \alpha < 1 + \sqrt{2} \quad (5.3)$$

et donc

$$\sqrt{2} - 1 = \alpha_0^{-1} < \alpha^{-1} < 1. \quad (5.4)$$

En additionnant (5.3) et (5.4), on trouve

$$\sqrt{2} < \alpha^{-1} + \alpha < 2 + \sqrt{2} \quad (5.5)$$

Comme  $(a - b\sqrt{2})\alpha = N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$ , on trouve  $\alpha^{-1} = \pm(a - b\sqrt{2})$ , donc

$$\alpha + \alpha^{-1} = \alpha \pm (a - b\sqrt{2}) = 2a \text{ ou } 2b\sqrt{2}.$$

Si la somme est égale à  $2a$ , l'inégalité (5.5) implique que  $a = 1$ , contradiction avec l'inégalité (5.3). Si la somme est égale à  $2b\sqrt{2}$ , le raisonnement est similaire. Ceci prouve l'égalité (5.2).

Soit maintenant  $\alpha \in U$  une unité  $> 1$ . Il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $\alpha_0^k \leq \alpha < \alpha_0^{k+1}$ . Alors  $\alpha\alpha_0^{-k} \in U \cap ]1, \alpha_0[$ . D'après ce qui précède,  $\alpha/\alpha_0^{-k} = 1$  et  $\alpha \in \alpha_0^{\mathbb{Z}}$ .

Pour une unité générale  $\alpha \in U$ , les  $\pm\alpha^{\pm 1}$  sont des unités et l'une d'elles est  $\geq 1$ . Il suit que

$$U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \{\pm\alpha_0^{\mathbb{Z}}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Notons qu'on a en même temps trouvé les solutions de l'équation de Pell-Fermat (5.1). En effet, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on écrit

$$(1 + \sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{Z}.$$

Alors les solutions sont  $\{\pm(a_k, b_k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Comme  $N_{L/\mathbb{Q}}(1 + \sqrt{2}) = -1$ , les solutions de l'équation avec second membre égal à  $-1$  (resp.  $1$ ) sont les  $\pm(a_k, b_k)$ , avec  $k$  impairs (resp. pairs).

**Exercice 5.1.7** Soit  $m \in \mathbb{Z}$ . On veut étudier les solutions de l'équation

$$a^2 - 2b^2 = m$$

avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

1. Supposons qu'il existe une solution  $(a_0, b_0)$ . Montrer que l'ensemble de toutes les solutions est constitué des  $\pm(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $k$  parcourant les entiers relatifs pairs, avec

$$(a_0 + b_0\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2}.$$

2. Montrer que  $a^2 - 2b^2 = m$  a une solution si et seulement si  $a^2 - 2b^2 = -m$  en a une (utiliser  $1 + \sqrt{2}$ ).
3. Il peut arriver que l'équation n'ait pas de solution du tout. Montrer que c'est le cas pour  $m = 3$ . (Raisonner modulo 3).

**Exercice 5.1.8** Soient  $A$  un anneau de Dedekind,  $B$  la clôture intégrale de  $A$  dans une extension finie séparable  $L$  de  $K = \text{Frac}(A)$ . Soit  $b \in B$ . Montrer que  $b \in B^*$  si et seulement si  $N_{L/K}(b) \in A^*$ .

## 5.2 Théorème des unités de Dirichlet

On note  $\mu_n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$  pour tout  $n \geq 1$ . Pour tout corps de nombres  $L$ , on note  $\mu_n(L) = \mu_n(\mathbb{C}) \cap L$  et  $\mu(L) = \cup_{n \geq 1} \mu_n(L)$  l'ensemble des racines de l'unité dans  $L$ .

Les éléments d'ordre fini dans un groupe commutatif forment un sous-groupe appelé le sous-groupe de torsion. Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

**Theorem 5.2.1.** (Dirichlet) *Soit  $L$  un corps de nombres de degré  $n$ , soient  $r_1, 2r_2$  les nombres de plongements réels et imaginaires de  $L$ .*

- (1) *Le sous-groupe de torsion de  $U(\mathcal{O}_L)$ , égal à  $\mu(L)$ , est fini et est cyclique.*
- (2) *Le groupe quotient  $U(\mathcal{O}_L)/\mu(L)$  est libre de rang  $r_1 + r_2 - 1$  et on a donc un isomorphisme (non canonique)*

$$U(\mathcal{O}_L) \simeq \mu(L) \times \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1}.$$

**Corollaire 5.2.2.** *Le groupe  $U(\mathcal{O}_L)$  est fini si et seulement si  $L = \mathbb{Q}$  ou si c'est une extension quadratique imaginaire de  $\mathbb{Q}$ .*

La partie (1) du théorème est relativement facile. Le sous-groupe de torsion (c'est-à-dire l'ensemble des éléments d'ordre fini) est clairement un sous-groupe du groupe  $\mu$  des racines de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . C'est donc  $\mu(L)$ . Soit  $\zeta \in \mu(L)$  d'ordre  $d$ . Si  $d = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$ , alors le polynôme minimal  $\Phi_d(X)$  de  $\zeta$  est de degré  $\varphi(d)$  (fonction indicatrice d'Euler) qui vaut  $\varphi(d) = \prod_i p_i^{r_i-1} (p_i - 1)$  et on a  $\varphi(d) \leq n$ . Donc  $p_i \leq n + 1$  et  $r_i \leq 1 + \ln n / \ln 2$ . Ce qui prouve que l'ensemble des  $d$  est fini. Donc  $\mu(L)$  est fini et contenu dans  $\mu_N$  (l'ensemble des racines  $N$ -ièmes complexes de l'unité). Ce dernier étant cyclique,  $\mu(L)$  aussi.

Pour la deuxième partie du théorème, nous allons procéder en plusieurs étapes. Rappelons (4.2.2) qu'un sous-groupe discret d'un espace vectoriel  $H \simeq \mathbb{R}^m$  est un sous-groupe  $G$  tel que pour tout  $x \in G$ , il existe  $U_x$  ouvert de  $H$  avec  $U_x \cap G = \{x\}$ . Il suffit que cela soit vrai pour  $0 \in G$  car  $U_0 + x$  est un voisinage ouvert de  $x$  dont l'intersection avec  $G$  se réduit à  $\{x\}$ . Commençons avec un résultat sur la structure des sous-groupes discrets.

**Lemme 5.2.3.** *Soit  $G$  un sous-groupe discret d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $H$  de dimension finie  $m$ .*

- (1) *Le sous-ensemble  $G$  est fermé dans  $H$ , et son intersection avec toute partie compacte de  $H$  est finie.*
- (2) *Le groupe  $G$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par  $r \leq m = \dim H$  vecteurs libres sur  $\mathbb{R}$ .*
- (3) *S'il existe une partie bornée  $M$  dans  $H$  telle que*

$$H = G + M := \{g + x \mid g \in G, x \in M\},$$

*alors  $G$  est de rang  $m$ .*

*Démonstration.* (1) Soit  $U_0$  un voisinage ouvert de  $0 \in G$  tel que  $G \cap U_0 = \{0\}$ . Alors  $(U_0 + g) \cap G = \{g\}$  pour tout  $g \in G$ . Si  $(g_n)_n$  est une suite convergente avec  $g_n \in G$ . Alors c'est une suite de Cauchy. Donc il existe  $N \geq 1$  tel que  $g_n - g_N \in U_0 \cap G = \{0\}$  pour tout  $n \geq N$ . Par suite  $(g_n)_n$  est stationnaire et sa limite appartient à  $G$ . Donc  $G$  est fermé.

On a un recouvrement ouvert de  $P$

$$P \subset (H \setminus G) \cup \bigcup_{g \in G} (U_0 + g)$$

dont, par hypothèse de compacité, on peut extraire un recouvrement fini

$$P \subset (H \setminus G) \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q} (U_0 + g_i).$$

Il suit que  $P \cap G \subseteq \{g_1, \dots, g_q\}$  est fini.

(2) Soient  $e_1, \dots, e_r \in G$  des vecteurs libres dans  $H$  avec  $r$  maximal. Montrons que  $G$  est engendré (comme  $\mathbb{Z}$ -module) par  $r$  éléments (mais pas nécessairement par  $e_1, \dots, e_r$ ). Posons

$$P = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq r} x_i e_i \mid 0 \leq x_i \leq 1 \right\}.$$

C'est l'image de  $[0, 1]^r$  par l'application continue

$$\mathbb{R}^r \rightarrow H, \quad (x_i)_i \mapsto \sum_i x_i e_i,$$

c'est donc un espace compact. Donc  $P \cap G$  est fini. Soit  $\alpha \in G$ . On peut écrire

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq r} x_i e_i, \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\alpha = \left( \sum_{1 \leq i \leq r} [x_i] e_i \right) + \sum_{1 \leq i \leq r} (x_i - [x_i]) e_i \in \sum_i \mathbb{Z} e_i + P \cap G.$$

Donc  $G$  est engendré par  $\{e_1, \dots, e_r\} \cup (P \cap G)$ . C'est donc un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini, sans torsion, donc libre. Comme  $G / (\sum_{1 \leq i \leq r} \mathbb{Z} e_i)$  est fini, on voit que  $G$  est de rang  $r$  par le théorème des bases adaptées 1.3.2.

(3) On peut supposer  $M$  fermé, donc compact. Soit  $H_0$  le sous-espace vectoriel de  $H$  engendré par  $G$ . La surjection canonique  $H \rightarrow H/H_0$  induit une application continue surjective  $M \rightarrow H/H_0$  par l'hypothèse  $H \subseteq G + M$ . Donc l'espace vectoriel réel  $H/H_0$  est compact, ce qui l'oblige à être nul.  $\square$

Pour étudier les unités de  $\mathcal{O}_L$ , on va d'abord plonger  $L^*$  dans un hyperplan de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ . On reprend les notations

$$\text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \bar{\mathbb{Q}}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}, \bar{\sigma}_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \bar{\sigma}_{r_1+r_2}\}$$

pour les plongements réels et imaginaires de  $L$ . Considérons  $\ell : L^* \rightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}$  définie par

$$x \mapsto (\ln |\sigma_1(x)|, \dots, \ln |\sigma_{r_1}(x)|, \ln |\sigma_{r_1+1}(x)|, \dots, \ln |\sigma_{r_1+r_2}(x)|).$$

C'est la version logarithmique de l'application  $\rho$  définie en 4.2.2. Elle est bien définie car  $\sigma_j(x) \neq 0$  pour  $x \in L^*$  et c'est clairement un homomorphisme de groupes.

Notons  $U = U(\mathcal{O}_L)$ . Le lemme suivant précise la structure de  $\ell(U)$  et du quotient de  $U/U_{\text{tors}}$ .

**Lemme 5.2.4.** *Conservons les notations ci-dessus.*

- (1) *Pour toute partie bornée  $B \subset \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ ,  $\ell^{-1}(B) \cap U$  est fini. En particulier  $\ell(U)$  est un sous groupe discret, libre de rang fini.*
- (2) *Le noyau de  $\ell$  est égal à  $\mu(L)$  et c'est un groupe fini cyclique.*

*Démonstration.* (1) Soit  $B$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ . Il existe  $c > 0$  tel que

$$|\sigma_i(\alpha)| \leq c, \quad \forall i, \forall \alpha \in \ell^{-1}(B).$$

Il existe donc  $c' > 0$  qui majore les valeurs absolues de toutes les fonctions symétriques en une partie des  $\sigma(\alpha)$ ,  $\sigma \in \text{Isom}_{\mathbb{Q}}(L, \mathbb{Q})$ . Il suit que le polynôme minimal  $m_\alpha(X)$  de  $\alpha$  est à coefficients bornés par  $c'$ . Si de plus  $\alpha \in U \subset \mathcal{O}_L$ , on a  $m_\alpha(X) \in \mathbb{Z}[X]$ . Or il n'existe qu'un nombre fini de polynômes dans  $\mathbb{Z}[X]$  de degré  $\leq n$  et à coefficients bornés par  $c'$ . Donc  $\mathcal{O}_L \cap \ell^{-1}(B)$ , et *a fortiori*  $U \cap \ell^{-1}(B)$ , est fini. Par suite  $\ell(U)$  a une intersection finie avec toute partie bornée de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ . Cela implique immédiatement que  $\ell(U)$  est discret. Par le lemme 5.2.3,  $\ell(U)$  est libre de rang fini sur  $\mathbb{Z}$ .

(2) En prenant  $B = \{0\}$  dans (1), on obtient que  $\ker \ell \cap U$  est un sous-groupe fini de  $L^*$ , ses éléments sont donc d'ordre fini pour la multiplication dans  $L^*$  et ce sont donc des racines de l'unité<sup>1</sup>. Inversement, si  $\zeta \in \mu(L)$ , avec  $\zeta^d = 1$ , alors  $d \ln |\sigma_i(\zeta)| = 0$ , donc  $\ln |\sigma_i(\zeta)| = 0$  et  $\zeta \in \ker \ell$ . Par ailleurs,  $\zeta \in \mathcal{O}_L^*$  puisque son inverse,  $\zeta^{d-1}$ , appartient à  $\mathcal{O}_L$ . Enfin,  $\mu(L)$  étant fini, d'ordre disons  $N$ , est contenu dans  $\mu_N(\mathbb{C})$ , l'ensemble des racines  $N$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . Ce dernier étant cyclique,  $\mu(L)$  aussi.  $\square$

*Démonstration.* (du théorème 5.2.1) Notons encore  $U = U(\mathcal{O}_L)$ . Il est clair que  $\mu(L) \subseteq U_{\text{tors}}$ . Réciproquement, tout élément d'ordre fini dans  $U$  est une racine de l'unité et appartient donc à  $\mu(L)$ . Par le lemme précédent, il ne reste qu'à montrer que le sous-groupe discret  $\ell(U)$  de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$  est de rang  $r_1 + r_2 - 1$ . Pour tout  $\alpha \in U$ , on a

$$\sum_{1 \leq i \leq r_1} \ln |\sigma_i(\alpha)| + 2 \sum_{1 \leq j \leq r_2} \ln |\sigma_j(\alpha)| = \ln |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| = 0.$$

Donc  $\ell(U)$  est contenu dans l'hyperplan

$$H := \{(t_1, \dots, t_{r_1+r_2}) \in \mathbb{R}^{r_1+r_2} \mid t_1 + \dots + t_{r_1} + 2t_{r_1+1} + \dots + 2t_{r_1+r_2} = 0\}$$

de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ . Il suit que  $\ell(U)$  est de rang  $\leq r_1 + r_2 - 1$ . L'inégalité inverse est plus délicate. Nous allons construire une partie bornée  $M$  de  $H$  telle que  $H = M + \ell(U)$  et appliquer le lemme 5.2.3(3).

<sup>1</sup>On vient de montrer le théorème de Kronecker : si un nombre algébrique  $z \in \mathbb{C}$  est tel que tous ses conjugués sont de module 1, alors  $z$  est une racine de l'unité!

**Notation :** Si  $X, Y$  sont deux sous-ensembles de l'anneau produit  $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ , on note  $XY$  l'ensemble des produits  $xy$  avec  $x \in X$  et  $y \in Y$ .

L'application  $\ell$  est la restriction à  $U$  de la composition de

$$\rho : L^* \rightarrow (\mathbb{R}^*)^{r_1} \times (\mathbb{C}^*)^{r_2}$$

(4.2.2) et de l'application surjective

$$\theta : (\mathbb{R}^*)^{r_1} \times (\mathbb{C}^*)^{r_2} \rightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

$$\theta(x, z) = (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_{r_1}|, \ln |z_{r_1+1}|, \dots, \ln |z_{r_1+r_2}|)$$

qui est un homomorphisme de groupes surjectif et continu. Notons que  $\rho(U) \subseteq \theta^{-1}(H)$ . Il suffit donc de trouver une partie  $T$  de  $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$  telle que  $\theta(\theta^{-1}(H) \cap T)$  soit bornée et que  $\theta^{-1}(H) \subseteq \rho(U)T$  (on prendra alors  $M = \theta(\theta^{-1}(H) \cap T)$ ).

Soit  $\delta > 0$  un nombre réel, qu'on choisira assez grand (on précisera plus tard). Posons

$$X_\delta = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \mid |x_i| \leq \delta, |z_{r_1+j}| \leq \delta\}$$

et

$$Z_\delta = \{\rho(\alpha^{-1}) \mid \alpha \in \mathcal{O}_L, \alpha \neq 0, |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \delta^n\}.X_\delta.$$

On veut montrer que  $\theta^{-1}(H) \subseteq Z_\delta$  pour  $\delta$  suffisamment grand. Montrons que

$$\delta^n \geq 2^{n-r_1} \pi^{-r_2} \text{vol}(\rho(\mathcal{O}_L))$$

suffit. Soit  $y \in \theta^{-1}(H)$ . Posons

$$Y_y := y^{-1}.X_\delta = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \mid |x_i| \leq |y_i|^{-1}\delta, |z_{r_1+j}| \leq |y_{r_1+j}|^{-1}\delta\}.$$

C'est une partie convexe compacte symétrique de  $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$  de volume

$$\text{vol}(Y_y) = \prod_{1 \leq i \leq r_1} (2\delta |y_i|^{-1}) \prod_{1 \leq j \leq r_2} (\pi(\delta |y_{r_1+j}|^{-1})^2) = 2^{r_1} \pi^{r_2} \delta^n \geq 2^n \text{vol}(\rho(\mathcal{O}_L))$$

(on utilise l'hypothèse  $\theta(y) \in H$  dans l'égalité du milieu). Par le lemme 4.2.5,  $\rho(\mathcal{O}_L) \cap Y_y \neq \{0\}$ . Soit  $\alpha \in \mathcal{O}_L$  tel que  $\rho(\alpha) \in \rho(\mathcal{O}_L) \cap Y_y \setminus \{0\}$ . Alors  $\alpha \neq 0$  et on a  $|\sigma_i(\alpha)| \leq |y_i|^{-1}\delta$  si  $i \leq r_1$ , et  $|\sigma_{r_1+j}(\alpha)| \leq |y_{r_1+j}|^{-1}\delta$  si  $j \leq r_2$ . En tenant compte de l'hypothèse  $y \in \theta^{-1}(H)$ , on conclut que  $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \delta^n$ . Cela implique donc que  $y \in \rho(\alpha^{-1}).X_\delta$ . D'où  $\theta^{-1}(H) \subseteq Z_\delta$ .

Étudions maintenant  $Z_\delta$ . L'ensemble des idéaux principaux non nuls de  $\mathcal{O}_L$  de norme  $\leq \delta^n$  est fini (lemme 4.1.6). Soit  $\{\alpha_1 \mathcal{O}_L, \dots, \alpha_m \mathcal{O}_L\}$  cet ensemble. Alors pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}_L$  non nul de norme  $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \delta^n$ ,  $\alpha$  est le multiple d'un  $\alpha_q$  par une unité de  $\mathcal{O}_L$ . Cela implique que

$$Z_\delta = \rho(U).(\cup_{1 \leq q \leq m} \rho(\alpha_q^{-1}).X_\delta).$$

Notons

$$T = \cup_{1 \leq q \leq m} \rho(\alpha_q^{-1}).X_\delta.$$

C'est une partie bornée de  $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ . Il reste à montrer que  $\theta(\theta^{-1}(H) \cap T)$  est bornée. On a  $T$  contenu dans un  $X_R$  avec  $R > 1$ . Si  $(x, z) \in \theta^{-1}(H) \cap T$ , alors  $R \geq |x_i|, |z_{r_1+j}|$  car  $(x, z) \in X_R$ . Mais comme  $\theta(x, z) \in H$ , on a aussi

$$|x_1| \cdots |x_{r_1}| |z_{r_1+1}|^2 \cdots |z_{r_1+r_2}|^2 = 1.$$

Cela implique que  $|x_i|, |z_{r_1+j}| \geq R^{-n+1}$ . Donc  $\theta(\theta^{-1}(H) \cap T)$  est bornée. Ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Définition 5.2.5** Une famille de  $r_1 + r_2 - 1$  éléments dans  $U(\mathcal{O}_L)$  qui forment une base dans le quotient libre de  $U(\mathcal{O}_L)$  est appelée un *système d'unités fondamentales*. Un tel système induit un isomorphisme  $U(\mathcal{O}_L) \simeq \mu(L) \times \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1}$ . Une *unité fondamentale* est un élément de  $U(\mathcal{O}_L)$  qui peut se compléter en un système d'unités fondamentales.

**Exemple 5.2.6** Revenons aux corps quadratiques réels  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ . Si  $\alpha = u + v\sqrt{d}$  ( $u, v \in \mathbb{Q}$ ) est une unité fondamentale, alors  $-\alpha, \pm\alpha^{-1}$  aussi. L'ensemble de ces quatre unités est égal à

$$\{u + v\sqrt{d}, -u - v\sqrt{d}, u - v\sqrt{d}, -u + v\sqrt{d}\}$$

(on a  $(u + v\sqrt{d})^{-1} = (u - v\sqrt{d})N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)^{-1}$ ). Soit  $\alpha_0 = a + b\sqrt{d}$  le maximum de cet ensemble d'unités. Alors nécessairement  $a, b > 0$  et  $\alpha_0 > 1$ . Conclusion : il existe une unité fondamentale  $\alpha_0 = a + b\sqrt{d} > 1$ . Il est clair qu'elle est alors la plus petite des unités  $> 1$ . Celles-ci sont de la forme  $(a + b\sqrt{d})^n = a_n + b_n\sqrt{d}$  avec  $n \geq 1$  et  $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ .

Supposons  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ . Alors  $a, b, a_n, b_n \in \mathbb{N}$  et il est facile de voir que  $a_n, b_n$  sont des suites croissantes. En particulier,  $b_n \geq b$ . Donc  $b$  est le plus petit entier naturel tel que  $db^2 = \square + 1$  ou  $\square - 1$ . Ainsi, une unité fondamentale de  $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$  est donnée par  $8 + 3\sqrt{7}$ .

Quelques autres exemples :  $4 + \sqrt{15}$ ,  $170 + 39\sqrt{19}$  sont les unités fondamentales respectives des corps  $\mathbb{Q}[\sqrt{15}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt{19}]$ . Pour  $L = \mathbb{Q}[\sqrt{13}]$ , on trouve par une méthode similaire  $(3 + \sqrt{13})/2$ . Avec le logiciel pari, utiliser la commande `quadunit(d)` où  $d$  est le discriminant de l'extension quadratique réelle concernée.

Nous terminons par l'étude des unités des extensions cyclotomiques. Soit  $m \geq 3$ . Une *extension cyclotomique* est une extension de  $\mathbb{Q}$  engendré par une racine de l'unité  $\zeta_m$  d'ordre  $m \geq 3$ . Pour simplifier, nous nous restreignons au cas  $m = p > 2$  premier. Notons  $\zeta$  une racine primitive  $p$ -ième de l'unité,  $L = \mathbb{Q}[\zeta]$  et  $L^+ = \mathbb{Q}[(\zeta + \zeta^{-1})/2]$ . La proposition suivante rassemble les résultats qui seront utilisés dans la section suivante.

**Proposition 5.2.7.** *Avec les notations ci-dessus, les propriétés suivantes sont vraies.*

- (1) On a  $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta]$ .
- (2)  $\mu(L) = \pm\langle\zeta\rangle = \{\pm\zeta^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle-\zeta\rangle$ .
- (3)  $L^+ = L^{\langle c \rangle}$  où  $c$  est la conjugaison complexe.
- (4) Pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}_L$ , on a  $\alpha^p \in \mathbb{Z} + p\mathcal{O}_L$ .
- (5) Pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}$  premiers à  $p$ , on a  $(\zeta^i - 1)/(\zeta^j - 1) \in U(\mathcal{O}_L)$ .

*Démonstration.* (1) TD.

(2) Si  $\lambda \in \mu(L)$  est d'ordre  $N$ , alors  $\lambda\zeta$  est d'ordre  $m := \text{ppcm}(N, p)$  et on a  $\mathbb{Q}[\lambda\zeta] \subseteq \mathbb{Q}[\zeta]$ . Ce qui implique que  $\varphi(m) \mid \varphi(p)$ . En écrivant  $m = p^r m'$  avec  $p$

premier à  $m'$  et  $r \geq 1$  (car  $p \mid m$ ), on trouve facilement que  $r = 1$  et  $m' = 1$  ou  $2$ , donc  $\lambda$  ou  $-\lambda$  est une puissance de  $\zeta$ .

(3) Comme  $\zeta$  est racine du polynôme

$$X^2 - (\zeta + \zeta^{-1})X + 1 \in L^+[X],$$

on voit que  $[L : L^+] \leq 2$ . On a l'égalité car  $\zeta$  est imaginaire et  $L^+ \subseteq \mathbb{R}$ . La conjugaison complexe  $c$  préserve  $L$  et est égale à l'identité sur  $L^+$ , c'est donc le générateur du groupe de Galois de  $L/L^+$ .

(4) Soit  $\alpha \in \mathcal{O}_L$ . Alors  $\alpha = \sum_{0 \leq i \leq p-2} a_i \zeta^i$  avec  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Dans tout anneau commutatif  $A$ , on a  $(x + y)^p \in x^p + y^p + pA$ . Donc

$$\alpha^p \in a_0^p + a_1^p + \cdots + a_{p-2}^p + p\mathcal{O}_L \subseteq \mathbb{Z} + p\mathcal{O}_L.$$

(5) Comme  $\zeta^j$  est un générateur du groupe des racines  $p$ -ièmes de l'unité, on a  $\zeta^i = (\zeta^j)^m$  pour un  $m \geq 1$ . Alors

$$\frac{\zeta^i - 1}{\zeta^j - 1} = (\zeta^j)^{m-1} + \cdots + (\zeta^j) + 1 \in \mathcal{O}_L.$$

Par symétrie,  $(\zeta^j - 1)/(\zeta^i - 1) \in \mathcal{O}_L$ . Donc  $(\zeta^i - 1)/(\zeta^j - 1) \in U(\mathcal{O}_L)$ .  $\square$

**Remarque 5.2.8** Le sous-groupe  $U'$  de  $U(\mathcal{O}_L)$  engendré par les unités de 5.2.7(5) s'appelle le groupe des unités cyclotomiques. Le théorème des unités de Dirichlet dit que  $U(\mathcal{O}_L)/\mu(L)$  est libre de rang  $(p-3)/2$ . Pour  $q = 2, \dots, p-1$ , notons  $u_q = (\zeta^q - 1)/(\zeta - 1)$ . On a  $u_{p-q} = -\zeta^{-q}u_q$ . Donc  $U'$  est engendré par les  $u_q$  pour  $2 \leq q \leq (p-1)/2$ . On peut montrer que  $U'$  est d'indice fini dans  $U(\mathcal{O}_L)$ .

**Proposition 5.2.9.** *On a  $U(\mathcal{O}_L) = \langle \zeta \rangle U(\mathcal{O}_{L^+})$ .*

*Démonstration.* (1) On a l'inclusion  $\langle \zeta \rangle U(\mathcal{O}_{L^+}) \subseteq U(\mathcal{O}_L)$  puisque  $\zeta \in U(\mathcal{O}_L)$  et que  $L^+ \subseteq L$  implique que  $\mathcal{O}_{L^+} \subseteq \mathcal{O}_L$  et donc que  $U(\mathcal{O}_{L^+}) \subseteq U(\mathcal{O}_L)$ .

(2) Montrons que  $U(\mathcal{O}_L)/U(\mathcal{O}_{L^+})$  est un groupe fini. Comme les groupes en question sont de type fini, il suffit de montrer qu'ils ont le même rang (par définition le rang d'un groupe commutatif  $M$  de type fini est le rang du module libre  $M/M_t$ , voir 1.3.1).

(2.1) L'extension  $L$  est totalement imaginaire de degré  $p-1$  car tous les conjugués de  $\zeta$  sont des racines primitives  $p$ -ième de l'unité, donc imaginaires. Cela veut dire que  $L$  admet 0 plongement réel et  $p-1$  plongements imaginaires (2.3.11). Il suit que  $U(\mathcal{O}_L)$  est de rang  $((p-1)/2)-1$  par le théorème de Dirichlet 5.2.1.

(2.2) À l'opposé,  $L^+$  est totalement réelle. En effet, si  $\sigma : L^+ \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}$  est un plongement, il se relève en un plongement  $L \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}$  toujours noté  $\sigma$  (2.2.15). Alors  $\sigma(\zeta) = \zeta'$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité, donc  $\zeta' = e^{2ik\pi/p}$  pour un  $k \in \mathbb{Z}$  premier à  $p$ . Il suit que

$$\sigma(\zeta + \zeta^{-1}) = \zeta' + (\zeta')^{-1} = 2 \cos(2k\pi/p) \in \mathbb{R}.$$

Comme  $[L^+ : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}]/[L : L^+] = (p-1)/2$ , on voit que  $L^+$  admet  $(p-1)/2$  plongements réels et aucun plongement imaginaire. Par suite  $U(\mathcal{O}_{L^+})$  est de rang  $((p-1)/2)-1$ , exactement comme  $U(\mathcal{O}_L)$ .

(3) Montrons l'inclusion inverse  $U(\mathcal{O}_L) \subseteq \langle \zeta \rangle U(\mathcal{O}_{L^+})$ . Soit  $\alpha \in U(\mathcal{O}_L)$ . On cherche un entier relatif  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\beta := \zeta^k \alpha \in \mathbb{R}.$$

On aura alors  $\beta \in L^+$  par 5.2.7(3). Mais comme  $\beta \in \mathcal{O}_L \cap L^+ = \mathcal{O}_{L^+}$ , de même que  $\beta^{-1}$ , on a  $\beta \in U(\mathcal{O}_{L^+})$  et  $\alpha \in \langle \zeta \rangle U(\mathcal{O}_{L^+})$ .

La condition  $\beta \in \mathbb{R}$  revient à dire que  $\zeta^k \alpha = \zeta^{-k} \bar{\alpha}$ , ou que  $\bar{\alpha}/\alpha = \zeta^{2k}$ . On doit donc montrer que  $\bar{\alpha}/\alpha$  est une puissance paire de  $\zeta$ .

Notons  $r$  l'ordre du groupe  $U(\mathcal{O}_L)/U(\mathcal{O}_{L^+})$  qui fini d'après (2). Alors  $\alpha^r \in U(\mathcal{O}_{L^+}) \subset \mathbb{R}$ . Il suit que  $\bar{\alpha}^r = \alpha^r$ . Donc  $\bar{\alpha}/\alpha \in \mu(L) = \langle -\zeta \rangle$  d'après 5.2.7(2). On écrit  $\bar{\alpha}/\alpha = (-\zeta)^q$  pour un certain  $q \in \mathbb{Z}$ . Il suffit pour terminer de montrer que  $q$  est pair.

Supposons le contraire. Alors  $(\bar{\alpha}/\alpha)^p = (-1)^{pq} (\zeta^p)^q = -1$ . Or  $\alpha^p = m + p\gamma$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\gamma \in \mathcal{O}_L$  (5.2.7(1)). Il suit que

$$m + p\bar{\gamma} = \bar{\alpha}^p = -\alpha^p = -m - p\gamma,$$

et donc que  $2m = -p(\gamma + \bar{\gamma})$ . Cela implique que  $2\alpha^p = 2m + 2p\gamma \in p\mathcal{O}_L$ . En prenant la norme sur  $\mathbb{Q}$ , on trouve  $2^{p-1} \times (\pm 1) \in p\mathbb{Z}$ , absurde.  $\square$

### 5.3 Premier(s) cas du théorème de Fermat

Fixons  $n \geq 1$ . Nous nous intéressons aux solutions de l'équation (de Fermat<sup>2</sup>)

$$x^n + y^n = z^n, \quad x, y, z \in \mathbb{N}. \quad (5.6)$$

**Définition 5.3.1** Les *solutions triviales* sont celles avec  $xyz = 0$  (une des inconnues est nulle).

Une solution non triviale  $(x, y, z)$  de l'équation de Fermat (5.6) est dite *primitive* si  $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$ .

Soit  $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ , soit  $d = \text{pgcd}(x, y, z)$ . Alors  $(x, y, z)$  est solution si et seulement si  $(x/d, y/d, z/d)$  est solution. Donc il suffit de considérer les solutions primitives.

**Lemme 5.3.2.** *Soit  $n \geq 1$ . Pour qu'une solution  $(x, y, z)$  soit primitive il faut et il suffit que les  $x, y, z$  soient deux à deux premiers entre eux.*

*Démonstration.* La condition est évidemment suffisante. Inversement, tout diviseur premier commun de deux des entiers  $x, y, z$  divise nécessairement le troisième par la relation (5.6). Cela implique la nécessité.  $\square$

L'équation (5.6) n'a aucun intérêt pour  $n = 1$ .

#### 5.3.1 Le cas $n = 2$

Les triplets d'entiers  $\geq 1$  satisfaisant l'équation de Fermat sont les *triplets pythagoriens* en référence au théorème de Pythagore. Le plus connu est  $(3, 4, 5)$ . Mais ce n'est évidemment pas le seul :  $(5, 12, 13)$ .

**Proposition 5.3.3.** *Pour  $n = 2$ , les solutions primitives sont paramétrées par*

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2$$

ou

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2$$

avec des entiers naturels  $a > b > 0$  premiers entre eux et de parités différentes, selon que  $x$  est pair ou impair.

*Démonstration.* (1) Montrons que  $x, y$  ne sont pas de même parité. En effet, s'ils sont pairs tous les deux, alors  $z$  aussi, la solution n'est alors pas primitive. S'ils sont impairs tous les deux, alors  $z$  est pair. On écrit  $x = 2m + 1$ ,  $y = 2n + 1$ , et  $z = 2k$ . Alors  $4(m^2 + n^2 + m + n) + 2 = 4k^2$ , impossible.

(2) Supposons par exemple que  $x$  est pair. Alors  $y, z$  sont impairs par 5.3.2. Le  $\text{pgcd}$   $d$  et  $z - y$  et  $z + y$  est égal à 2 : en effet  $d$  divise  $2y = (z + y) - (z - y)$  et  $2z = (z + y) + (z - y)$ , donc  $d \mid \text{pgcd}(2y, 2z) = 2\text{pgcd}(y, z) = 2$ . Comme

$$\left(\frac{z - y}{2}\right) \left(\frac{z + y}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

<sup>2</sup>Pierre de Fermat, 1607-1665, magistrat et mathématicien français.

et que  $(z - y)/2$  et  $(z + y)/2$  sont des entiers naturels premiers entre eux, ils sont des carrés dans  $\mathbb{N}^*$  (lemme 5.3.5) : il existe  $a, b \in \mathbb{N}^*$  tels que  $z - y = 2b^2$  et  $z + y = 2a^2$ . On trouve alors

$$z = a^2 + b^2, \quad y = a^2 - b^2$$

et  $x = \sqrt{z^2 - y^2} = 2ab$ . □

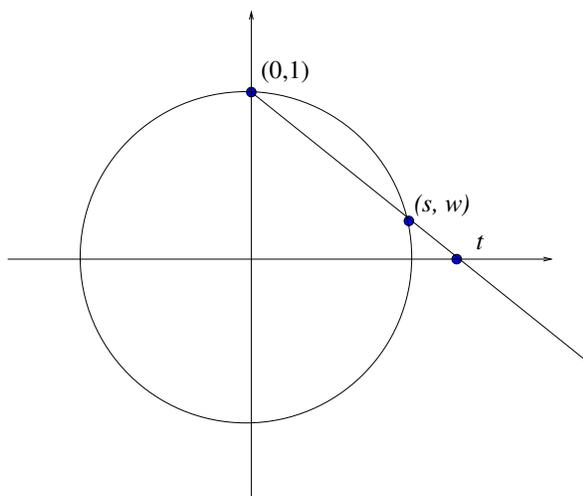
**Exemple 5.3.4** Pour  $a = 2, b = 1$ , on trouve  $(4, 3, 5)$ . Pour  $a = 3, b = 2$ , on trouve  $(12, 5, 13)$ .

**Méthode géométrique.** Il existe une façon plus géométrique pour résoudre l'équation. Elle consiste à paramétrer, en utilisant la projection stéréographique, les points du cercle (moins le pôle nord) par la droite.

Soit  $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . Alors c'est une solution si et seulement si

$$(s := x/z, \quad w := y/z)$$

est un point du cercle unité dans  $\mathbb{R}^2$  dans le premier cadran. Si on trace la droite  $L : X + tY - t = 0$  qui passe par  $(0, 1)$  et  $(t, 0)$  avec  $t$  nombre rationnel  $> 1$ ,



elle coupe le cercle unité dans le premier cadran au point  $(s, w)$  donné par le système d'équations ( $t > 1$  est fixé)

$$\begin{cases} s^2 + w^2 = 1 \\ s + tw = t \end{cases}$$

La deuxième équation donne  $s = t(1 - w)$ , que l'on substitue dans la première. On trouve (outre la solution triviale  $s = 0, w = 1$ )

$$w = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad s = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

En écrivant  $t = u/v$  avec des entiers naturels  $u > v$  premiers entre eux, on trouve que  $(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$  est une solution de l'équation de Fermat.

Si  $u$  ou  $v$  est pair (donc l'autre est impair), alors en raisonnant comme plus haut, on voit que  $(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$  est une solution primitive. Si  $u, v$  sont impairs, on pose  $a = (u + v)/2$ ,  $b = (u - v)/2$ , alors  $(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2) = 2(uv, (u^2 - v^2)/2, (u^2 + v^2)/2) = 2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$  et  $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$  est une solution primitive. On retrouve ainsi les solutions primitives de 5.3.3.

L'observation suivante est cruciale dans la preuve de la proposition 5.3.3.

**Lemme 5.3.5.** *Fixons un entier  $n \geq 1$ . Soit  $A$  un anneau factoriel<sup>3</sup>, soient  $a, b \in A$  non nuls et premiers entre eux. Supposons que  $ab$  soit une puissance  $n$ -ième, alors modulo les unités de  $A$ ,  $a$  et  $b$  sont des puissances  $n$ -ièmes (d'éléments premiers entre eux dans  $A$ ).*

*Plus généralement, si  $a_1, \dots, a_m \in A$  sont des éléments non nuls deux à deux premiers entre eux, et si leur produit est une puissance  $n$ -ième dans  $A$ , alors modulo les unités, les  $a_i$  sont des puissances  $n$ -ième d'éléments de  $A$  deux à deux premiers entre eux.*

*Démonstration.* On écrit les décomposition en produits de puissances d'éléments premiers deux à deux non associés (i.e. pas multiples par une unité)

$$a = u \prod_i p_i^{r_i}, \quad b = v \prod_j q_j^{s_j}, \quad u, v \in A^*.$$

La décomposition de  $ab$  est alors

$$ab = uv \prod_{i,j} p_i^{r_i} q_j^{s_j}.$$

Comme les éléments premiers  $p_i, q_j$  sont deux à deux non associés, si  $ab$  est une puissance  $n$ -ième, alors  $n$  divise tous les  $r_i, s_j$ . Il suit que  $a = u(\prod_i p_i^{r_i/n})^n$  et  $b = v(\prod_j q_j^{s_j/n})^n$ .

Le cas général avec un nombre quelconque d'éléments se démontre de la même façon.  $\square$

### 5.3.2 Le cas $n = 4$

**Proposition 5.3.6** (Fermat). *L'équation*

$$x^4 + y^4 = z^4$$

*n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}^*$ .*

En fait il montre un résultat plus fort.

<sup>3</sup>par exemple principal, voir aussi la Remarque 2.1.19

**Proposition 5.3.7** (Fermat). *L'équation*

$$x^4 - y^4 = z^2 \tag{5.7}$$

*n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}^*$ .*

**Remarque 5.3.8** Cette proposition implique la précédente car si  $x^4 + y^4 = z^4$ , alors  $z^4 - y^4 = (x^2)^2$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe des solutions. On peut en prendre une  $(x, y, z)$  avec  $x$  le plus petit possible. La preuve consiste alors à construire une autre solution  $(a, b, c)$  dans  $\mathbb{N}^*$  avec  $a < x$ . C'est la *méthode de la descente infinie* inventée par Fermat.

Soit donc  $(x, y, z)$  une telle solution. On voit immédiatement que  $x, y, z$  sont deux à deux premiers entre eux. Notons que

$$(y^2)^2 + z^2 = (x^2)^2, \tag{5.8}$$

donc le triplet  $(y^2, z, x^2)$  est décrit par la proposition 5.3.3 (selon la parité de  $y^2$ ).

(1) Supposons d'abord  $y$  impair. Alors il existe  $(a, b)$  comme dans 5.3.3 tels que

$$x^2 = a^2 + b^2, \quad y^2 = a^2 - b^2.$$

Il suit que

$$a^4 - b^4 = (xy)^2.$$

Donc  $(a, b, xy)$  est une solution de l'équation (5.7) avec  $a < x$ . Absurde.

(2) Supposons maintenant  $y$  pair. On raisonne de façon similaire mais en utilisant deux fois 5.3.3. Il existe  $a, b > 0$  premiers entre eux (on ne demande pas que  $a > b$ ) tels que

$$x^2 = a^2 + b^2, \quad y^2 = 2ab.$$

Supposons par exemple que  $a$  est pair. Alors d'après 5.3.3, il existe  $u, v > 0$  premiers entre eux tels que

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2.$$

Comme  $(y/2)^2 = uvb$  et que  $u, v, b$  sont deux à deux premiers entre eux, il suit du lemme 5.3.5 que

$$u = d^2, \quad v = e^2, \quad b = c^2$$

pour des entiers naturels  $d, e, c$ . Cela donne

$$d^4 - e^4 = c^2.$$

Comme  $d = \sqrt{u} \leq u = a/(2v) < a = \sqrt{x^2 - b^2} < x$ , cela donne encore une contradiction.  $\square$

Le corollaire suivant était une question de Diophantus qui a motivé la recherche des solutions de l'équation 5.3.7

**Corollaire 5.3.9.** *Il n'existe pas de triangle rectangle de côtés entiers, dont l'aire soit un carré.*

*Démonstration.* Si un tel triangle existe, de côtés  $x, y < z$ , alors il existe  $s \in \mathbb{N}^*$  avec

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad xy = 2s^2.$$

On a des égalités similaires en divisant tout par le pgcd de  $x, y, z$ . On peut donc supposer que  $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$ . Par 5.3.3, il existe  $a, b > 0$  premiers entre eux tels que

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2.$$

Il suit que  $aby = s^2$  avec  $a, b, y$  deux à deux premiers entre eux. Donc comme ci-dessus on conclut que  $a, b, y$  sont des carrés et la relation  $y = a^2 - b^2$  donne une solution de (5.7) dans  $\mathbb{N}^*$ , contradiction.  $\square$