Université de Bordeaux **Algèbre 3**
Licence de Sciences et Technologies
2014-2015

Devoir surveillé

13 mars 2015, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Exercice 1.

1. Soit $U_6 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\right\}$.
   (a) Montrez que U_6 est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, muni de la multiplication usuelle des nombres complexes, et qu'il est cyclique d'ordre 6.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le nombre d'éléments d'ordre n dans U_6.
2. Soit S_3 le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même, muni de la composition des applications (*on ne demande pas de redémontrer que c'est bien un groupe*). On note $\tau = (1, 2)$ la transposition qui échange 1 et 2 et laisse 3 fixe, et $\gamma = (1, 2, 3)$ la "permutation circulaire" qui applique 1 sur 2, 2 sur 3 et 3 sur 1.
   (a) Déterminer l'ordre de τ et celui de γ.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le nombre d'éléments d'ordre n dans S_3.
3. Les groupes U_6 et S_3 sont-ils isomorphes ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de décrire, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 6. Dans toute la suite, G désigne un tel groupe, dont on note la loi de groupe multiplicativement. L'élément neutre de G est noté e.

1. Quels sont les ordres possibles pour les éléments de G ?
2. On suppose dans cette question que G possède un élément d'ordre 2, que l'on note x, et un élément d'ordre 3, noté y.
   (a) On suppose dans un premier temps que x et y commutent c'est-à-dire que $xy = yx$. Montrer qu'alors xy est d'ordre 6 et conclure que G est dans ce cas un groupe cyclique d'ordre 6, isomorphe à U_6.
   (b) On suppose maintenant que x et y ne commutent pas, c'est-à-dire que $xy \neq yx$, et on pose $z = xyx^{-1}$ (noter en particulier que $z \neq y$).
      i. On note $H = \langle y \rangle$ le sous-groupe engendré par y. Justifier que G est la réunion disjointe de H et xH. En déduire que $z \in H$, puis que $z = y^2$.
      ii. Conclure que G est isomorphe à S_3 (on explicitera un isomorphisme).
3. (*Partiellement hors barème*) Le but de cette dernière question est de justifier que l'hypothèse faite au début de la question précédente, à savoir l'existence d'éléments d'ordre 2 et 3, est toujours satisfaite dans un groupe G d'ordre 6.
   (a) Supposons, par l'absurde, que G ne contienne pas d'élément d'ordre 3. Montrer qu'alors tous les éléments de $G \setminus \{e\}$ sont d'ordre 2. En déduire que G est abélien. En considérant alors le sous-groupe engendré par deux éléments distincts de $G \setminus \{e\}$, aboutir à une contradiction (déterminer l'ordre de ce sous-groupe).
   (b) Si y et z sont deux éléments d'ordre 3, on note $H = \langle y \rangle$ et $K = \langle z \rangle$ les sous-groupes qu'ils engendrent. Montrer qu'on a l'alternative $H \cap K = \{e\}$ ou $H = K$. En déduire que le nombre d'éléments d'ordre 3 dans G est divisible par 2. Conclure que G contient nécessairement des éléments d'ordre 2.