Etude du système d'Euler bi-température avec champ magnétique transverse

Xavier Lhébrard [1], Stéphane Brull[2], Bruno Dubroca[3],

[1] *LMPA, Université du Littoral et de la Côte d'Opale*

[2] *IMB, Université de Bordeaux*

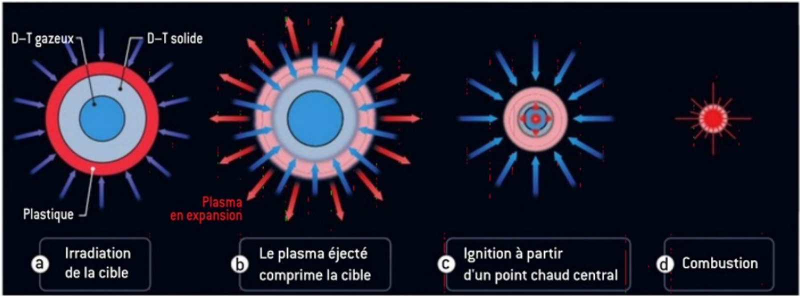
[3] *LCTS, Université de Bordeaux*

Schémas de type Boltzmann
23 novembre 2022

Introduction

Introduction

Travail au Centre de Lasers Intenses et Applications (CELIA).
Diagnostics pour le Laser Megajoule (CEA).
Application : Fusion par confinement inertiel.



Transport thermique des électrons

Système Euler bi-température

- Approche classique
  Coquel, Marmignon,1998.
- Nouvelle aproche
  Aregba, Brull et al. , 2017
  Modèle cinétique sous-jacent avec champs électrique

Prise en compte de champ magnétiques ?

Polarisation transverse magnétique

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

Elaboration du modèle

Cas d'une espèce

$f(t, x, v)$: fonction de disctribution

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f}_{transport} + \underbrace{F.\nabla_v f}_{force\ \ term} = \underbrace{\mathcal{C}(f, f)}_{collisional\ \ term}$$

ρ, u T : masse, vitesse et température

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} m\, f\, dv, \qquad u = \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}^3} m\, vf\, dv, \qquad \frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}^3} |v-u|^2 f\, dv.$$

Obtention de modèles fluides.

- Etat d'équilibre : $\mathcal{C}(f, f) = 0 \iff f = \mathcal{M}_f$
- $f = \mathcal{M}_f$ et prendre les moments de l'équation par rapport à $(1, v, v^2)$
  $\Rightarrow$ système Euler
- $f = \mathcal{M}_f + \varepsilon f_1$ et prendre les moments de l'équation par rapport à $(1, v, v^2)$
  $\Rightarrow$ système Navier-Stokes

Cas plusieurs espèces

Mélange d'une espèce d'ions et d'une espèce d'électron.

Espèce α. f_α : fonction de distribution de l'espèce α

$$n_\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha dv, \;\; u_\alpha = \frac{1}{n_\alpha}\int_{\mathbb{R}^3} v f_\alpha dv,$$

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{3}{2}\rho_\alpha \frac{k_B}{m_\alpha} T_\alpha + \frac{1}{2}\rho_\alpha |u_\alpha|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} m_\alpha \frac{v^2}{2} f_\alpha dv.$$

Quantités associées au mélange

$$u = \frac{\rho_e u_e + \rho_i u_i}{\rho_e + \rho_i}, \quad \frac{3}{2} n k_B T = \sum_\alpha \frac{1}{2}\rho_\alpha (u_\alpha^2 - u^2) + \frac{3}{2}\sum_\alpha n_\alpha k_B T_\alpha.$$

$$\bar{\rho} = \int_{\mathbb{R}^3} (q_e f_e + q_i f_i) dv = n_e q_e + n_i q_i,$$

$$j = \int_{\mathbb{R}^3} v (q_e f_e + q_i f_i) dv = n_e q_e u_e + n_i q_i u_i$$

Modèle cinétique plusieurs espèces

BGK pour l'espèce $\alpha = e, i$

$$\partial_t f_\alpha + v_1 \partial_{x_1} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(E_1 + B_3 v_2)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_1} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(E_2 - B_3 v_1)\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_2}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{M}_\alpha - f_\alpha) + \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}}\left(\overline{\mathcal{M}_{\alpha\beta}} - f_\alpha\right).$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\alpha(f_\alpha) &= \frac{n_\alpha}{(2\pi k_B T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}} exp(-\frac{|v-u_\alpha|^2}{2k_B T_\alpha/m_\alpha}) \\
\overline{\mathcal{M}_\alpha}(f_e, f_i) &= \frac{n_\alpha}{(2\pi k_B T/m_\alpha)^{3/2}} exp(-\frac{|v-u|^2}{2k_B T/m_\alpha})
\end{aligned}$$

Couplage avec les équations de Maxwell

$$\begin{cases}
\partial_x E_1 = \dfrac{\bar{\rho}}{\varepsilon^2}, & \partial_t E_1 = -\dfrac{j_1}{\varepsilon^2}, \\
\partial_t B_3 + \partial_x E_2 = 0, & \partial_t E_2 + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\partial_x B_3 = -\dfrac{j_2}{\varepsilon^2},
\end{cases}$$

Limite hydrodynamique

On choisit $f_\alpha = \mathcal{M}_\alpha$ et on prend les moments de l'équation par rapport à $(1, v, v^2)$.

Limite quasi-neutre pour les équations de Maxwell

$$q = 0, \quad j_1 = 0, \quad j_2 = -\partial_x B_3$$

Difficulté pour les moments d'ordre 2 :

$$\partial_t \mathcal{E}_\alpha + \partial_x (u_1(\mathcal{E}_\alpha + p_\alpha)) + q_\alpha n_\alpha (u_1 E_1 + u_{2,\alpha} E_2) = S_{\alpha\beta}.$$

Fermeture du système ? Loi d'Ohm généralisée

$$q_e n_e (E_1 + u_2 B_3) = c_i \partial_x p_e - c_e \partial_x p_i + (c_i - c_e) \partial_x (B_3^2/2),$$

$$E_2 = B_3 u_1,$$

Système MHD bi-température polarisation transverse

Résultat : Le système cinétique converge formellement vers le système d'équations suivant :

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho & +\partial_x(\rho u_1) = 0, \\
\partial_t(\rho u_1) & +\partial_x(\rho u_1^2 + p_e + p_i + B_3^2/2) = 0, \\
\partial_t(\rho u_2) & +\partial_x(\rho u_1 u_2) = 0, \\
\partial_t B_3 & +\partial_x(u_1 B_3) = 0, \\
\partial_t \overline{\mathcal{E}_e} & +\partial_x(u_1(\overline{\mathcal{E}_e} + p_e + c_e B_3^2/2)) - u_1(c_i \partial_x p_e - c_e \partial_x p_i) = S_{ei}, \\
\partial_t \overline{\mathcal{E}_i} & +\partial_x(u_1(\overline{\mathcal{E}_i} + p_i + c_i B_3^2/2)) \ \ + u_1(c_i \partial_x p_e - c_e \partial_x p_i) = -S_{ei},
\end{cases}
$$

Deux lois de pression et deux températures :

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha \varepsilon_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha, \quad \alpha = e, i.$$

Système non conservatif avec sources.

Problématique

Systèmes conservatifs :

- existence de solutions discontinues (ondes de choc)
- relations de Rankine Hugoniot
- solution admissible $\longleftrightarrow$ inégalité d'entropie

Systèmes non-conservatifs :

- Définition des solutions faibles ?
- Admissibilité des solutions faibles ? Conditions d'entropie ?
- Approximation numérique ?

Résultat :

- Schéma robuste et satisfaisant une inégalité d'entropie

Méthode numérique

Schéma de type Godunov

Forme condensée

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + B(U)\partial_x U = 0.$$

Discrétisation constante par maille

$$U_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x}\int_{C_i} U(t_n, x)dx.$$

On note $R(\xi, U_l, U_r)$ un solveur de Riemann approché.

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x/2} R(x/\Delta t, U_{i-1}, U_i) + \frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{0} R(x/\Delta t, U_i, U_{i+1})$$

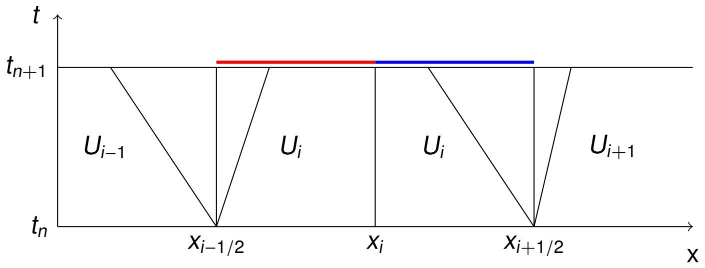
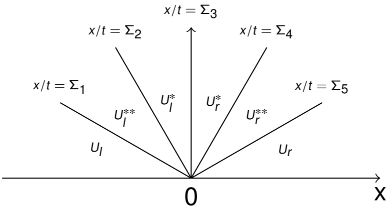


Schéma de type Godunov



Solveur simple :

$$R(x/t, U_l, U_r) = \begin{cases} U_l & \text{if} \quad x/t < \Sigma_1 \\ U_i & \text{if} \quad \Sigma_i < x/t < \Sigma_{i+1} \\ U_r & \text{if} \quad \Sigma_5 < x/t \end{cases}$$

Condition CFL 1/2

$$A(U_i, U_{i+1})\, \Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x, \quad \forall i$$

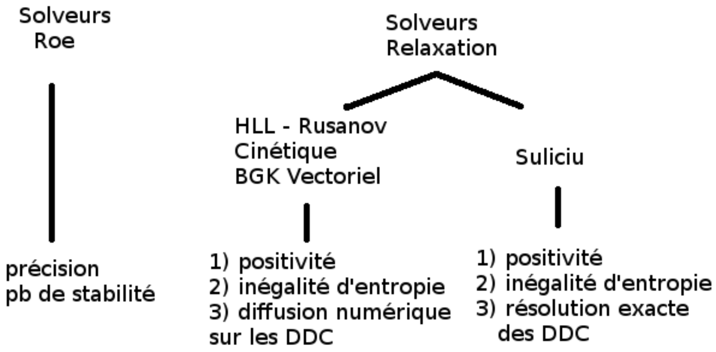
Avec $A(.,.)$ la vitesse maximale de propagation définie par :

$$A(U_l, U_r) = \max\left(|\Sigma_1|, \cdots, |\Sigma_p|\right),$$

où $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_p$ sont les vitesses du solveur de Riemann.

Schéma de type Godunov

Différents type de solveurs de Riemann approchés



Modèles relaxation

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R},$$
$$u(t,x) \in \mathbb{R}^p, \quad F(u(t,x)) \in \mathbb{R}^p$$

- Solutions bornées mais discontinues,
- Les non-linéarités de F induisent une non-unicité des solutions.

Idées de relaxation

- Construire une solution comme limite $u(t,x) = \lim u_\varepsilon(t,x)$, $u_\varepsilon(t,x) = Lf_\varepsilon(t,x)$, obtenue à partir de solutions f_ε d'un autre système (plus simple) de lois de conservations,
- Cette solution $f_\varepsilon(t,x)$ est forcée, par un système de relaxation, de rester dans une variété d'équilibre $f_\varepsilon(t,x) \in \mathcal{M}$
- Cette variété $\mathcal{M}$ peut être paramétrisée par $u \equiv Lf$, i.e. on a

$$f \in \mathcal{M} \text{ sssi } f = M(u), \quad \text{and} \quad LM(u) = u.$$

Exemple : modèle Jin Xin

Le modèle le plus simple (ε ommis) :

$$\partial_t f_1 - c\partial_x f_1 = \frac{M_1(u) - f_1}{\varepsilon},$$
$$\partial_t f_2 - c\partial_x f_2 = \frac{M_2(u) - f_2}{\varepsilon},$$

avec $f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, $u(t,x) = Lf(t,x)$, $c > 0$,

$$Lf = f_1 + f_2,$$
$$M(u) = \left(\frac{u - F(u)/c}{2}, \frac{u + F(u)/c}{2}\right)$$

- On a $\partial_t u + c\partial_x(f_2 - f_1) = 0$,
- Le second membre impose $f - M(u) \to 0$, i.e. $f \to M(u)$, donc $c(f_2 - f_1) \simeq c(M_2(u) - M_1(u)) = F(u)$.

Relaxation hyperbolique

Cadre général :

$$\partial_t f + \partial_x \mathcal{A}(f) = \frac{Q(f)}{\varepsilon}$$

$$f(t,x) \in \mathbb{R}^q, q > p, \quad L : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p \text{ linéaire}$$

L'équibilibre maxwellien vérifie les relations de c

$$LM(u) = u,$$
$$L\mathcal{A}(M(u)) = F(u)$$

$$LQ(f) = 0,$$
$$Q(f) = 0 \quad \text{sssi} \quad f = M(u)$$

Exemple : relaxation BGK terme de relaxation $Q(f) = M(Lf) - f$.

Modèles de relaxation cinétique

- L'espace $\mathbb{R}^q = (\mathbb{R}^p)^\Theta$ est un espace de fonctions, $f = f(\xi)$, $\xi \in \Theta$, avec $\xi \in \Theta$ avec un espace mesurable de mesure positive $d\xi$.
- La non-linéarité est $\mathcal{A}(f)(\xi) = a(\xi)f(\xi)$ pour une certaine fonction $a(\xi) \in \mathbb{R}$,
- L'opérateur linéaire est $Lf = \int_\Theta f(\xi)d\xi$,
- La maxwellienne devient $M(u) = M(u,\xi)$, et les relations de consistances :

$$\int M(u,\xi)d\xi = u, \quad \int a(\xi)M(u,\xi)d\xi = F(u).$$

Commentaires :

- Ce sont des modèles de type semi-linéaires diagonaux, potentiellement de dimension infinie,
- Ces modèles interviennent naturellement en théorie cinétique des gaz, comme l'équation de Boltzmann.

Limite de relaxation

Comment justifier la limite de relaxation $\varepsilon \to 0$?

- Quand la limite *u* est **régulière** (dans un espace de Sobolev).
  Méthode : **méthode d'entropie relative** pour estimer la distance à la solution limite

  N. Masmoudi, *Some recent developments on the hydrodynamic limit of the Boltzmann equation*, 2002.

- Lorsque l'équation limite n'est **pas** trop **fortement non linéaire** (ex. Navier-Stokes, avec viscosité)
  Méthode : contrôler la **compacité** et la **taille** de la solution

  F. Golse, L. Saint-Raymond, *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels*, 2004.

- Lorsque la limite *u* est une **solution faible discontinue**.
  Méthode : obtenir des bornes L^∞ sur la solution, et obtenir **compacité** (estimations BV, compacité compensée).

  F. Berthelin, F. Bouchut, *Kinetic invariant domains and relaxation limit from a BGK model to isentropic gas dynamics*, 2002.

Stabilité de la limite de relaxation

L'idée est d'écrire des conditions nécessaires/suffisantes pour que la limite de relaxation soit assurée.

Exemple : Pour le modèle de Jin-Xin, une condition de stabilité est la condition sous-charactéristique

$$\mathrm{Sp}(F'(u)) \subset [-c, c]$$

Plusieurs conditions de stabilité existent. Nous allons nous concentrer sur deux conditions :

- la condition d'**entropie étendue** (CEE)
- la condition de **dissipation de Chapman-Enskog** (DCE)

Entropie

La notion d'entropie est utilisée pour les lois de conservation hyperboliques pour

- sélectionner les solutions admissible (Lax)
- établir des estimations a priori
- prouver compacité (DiPerna)

Pour la loi de conservation

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$$

une *entropie* est une fonction scalaire $\eta(u)$, elle qu'il existe une fonction scalaire $G(u)$, appelée flux d'entropie, satisfaisant

$$G'(u) = \eta'(u)F'(u)$$

Intérêt : les solutions régulières satisfont $\partial_t\eta(u) + \partial_x G(u) = 0$.
Si η est une entropie convexe, une solution faible est dîte entropique si

$$\partial_t\eta(u) + \partial_x G(u) \leq 0.$$

Systèmes de relaxation : condition d'entropie étendue (CEE)

Cette condition a été donné dans

G.Q. Chen, C.D. Levermore, T.-P. Liu, *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy*, 1994.

Levemore, Liu, 1994]. Cadre relaxation hyperbolique

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \qquad \partial_t f + \partial_x \mathcal{A}(f) = Q(f)/\varepsilon.$$

Définition : Étant donné une entropie convexe η, on dit que (CEE) est vraie si il existe une entropie convexe $\mathcal{H}(f)$ avec flux d'entropie $\mathcal{G}(f)$, tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(M(u)) &= \eta(u) + cst, \\ \mathcal{G}(M(u)) &= G(u) + cst, \end{aligned}$$

et tel qu'on ait le principe de minimisation

$$\mathcal{H}(M(u)) \leq \mathcal{H}(f) \quad \text{dès que } u = Lf.$$

Dissipation de Chapman-Enskog (DCE)

Cadre relaxation hyperbolique

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \qquad \partial_t f_\varepsilon + \partial_x \mathcal{A}(f_\varepsilon) = Q(f_\varepsilon)/\varepsilon.$$

avec une relaxation de type BGK $Q(f_\varepsilon) = M(Lf_\varepsilon) - f_\varepsilon$. Alors, formellement, avec $u_\varepsilon = Lf_\varepsilon$,

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x F(u_\varepsilon) = \partial_x \left(D(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon\right),) \tag{1}$$

jusqu'au termes en ε^2, avec

$$D(u) = L\mathcal{A}'(M(u))^2 M'(u) - F'(u)^2$$

Définition Soit η une entropie convexe. On dit que (DCE) est vraie si (1) est η-dissipative, i.e. $D(u)$ est symétriquement positive pour $\eta''(u)$. Cela implique que

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x G(u) - \varepsilon\partial_x(\eta'(u)D(u)\partial_x u) = -\varepsilon D(u)^t \eta''(u) \cdot \partial_x u \cdot \partial_x u \le 0$$

Commentaire :

entropie étendue (CEE)$\Rightarrow$ Chapman-Enskog (DCE)

Discrétisation

L'approche par relaxation permet de construire des **schémas numériques** pour les lois de conservations $\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$, par une approche de **transport-projection.** On peut la résumer de la manière suivante :

- On commence avec $u^n(x)$ constant par morceaux,
- On définit $f^n(x) = M(u^n(x))$, qui est constant par morceaux,
- On résoud le problème de relaxation $\partial_t f + \partial_x \mathcal{A}(f) = 0$ pour $t^n < t < t^{n+1}$
- On définit $u^{n+1}(x)$ par des projections constantes par morceaux de $Lf(t^{n+1}, x)$

Discrétisation

Quelques commentaires sur ce type de schémas

- On construit un **solveur de Riemann approché**, qui génère un schéma conservatif de type volumes finis
- En particulier, les modèles cinétiques de relaxation génèrent des **schémas cinétiques**,
- Si la condition d'entropie étendue (CEE) est satisfaite, alors le schéma numérique sera **stable**, sous condition CFL, il satisfera une **inégalité d'entropie discrète.**

Solveur de Riemann approché par relaxation

Système de lois de conservation

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad p \text{ variables.}$$

Système de relaxation

$$\partial_t f + \partial_x \mathcal{A}(f) = \frac{Q(f)}{\varepsilon}, \quad q > p \text{ variables.}$$
$$LM(U) = U$$
$$L\mathcal{A}(M(U)) = F(U)$$

Solveur de Riemann approché pour le système de relaxation

$$\mathcal{R}(x/t, f_l, f_r)$$

Solveur de Riemann approché pour le système de lois de conservation

$$R(x/t, U_l, U_r) = L\,\mathcal{R}(x/t, M(U_l), M(U_r)).$$

Exemple de système de relaxation LD

Système d'Euler isentropique

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \boxed{P} \end{pmatrix}$$

Système de relaxation Suliciu

$$f = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \boxed{\pi} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(f) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \boxed{\pi} \\ \rho \pi u + c^2 u \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad M(U) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \boxed{P} \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$LM(U) = U$$
$$L\mathcal{A}(M(U)) = F(U)$$

Problème de Riemann pour des systèmes LD

On considère un système hyperbolique

$$\partial_t U + \partial_x(F(U)) = 0.$$

Soit $\lambda(U)$ une valeur propre de $F'(U)$ and $E_\lambda(U) := \mathrm{Ker}(F'(U) - \lambda(U) Id)$.

$\lambda(U)$ est linéairement dégénérée (LD) $\longleftrightarrow \forall U, \forall r \in E_\lambda(U), \quad \partial_U \lambda(U).r = 0$

$w(U)$ est un invariant de Riemann $\longleftrightarrow \forall U, \forall r \in E_\lambda(U), \quad \partial_U w(U).r = 0$

Si U_1, U_2 sont reliés par une discontinuité de contact alors $w(U_1) = w(U_2)$

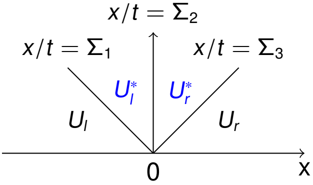
Solution du problème de Riemann pour des systèmes LD $\longrightarrow$ uniquement des discontinuité de contact.

relations de Rankine Hugoniot $\longleftrightarrow$ invariants de Riemann

Exemple de système LD : un système diagonal

$$W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \partial_t W + D\partial_x W = 0$$

$$\begin{aligned}
\partial_t w_1 + \Sigma_1 \partial_x w_1 &= 0,\\
\partial_t w_2 + \Sigma_2 \partial_x w_2 &= 0,\\
\partial_t w_3 + \Sigma_3 \partial_x w_3 &= 0.
\end{aligned}$$



$$U_l = \begin{pmatrix} w_{1,l} \\ w_{2,l} \\ w_{3,l} \end{pmatrix}, \quad U_l^* = \begin{pmatrix} w_{1,r} \\ w_{1,l} \\ w_{1,l} \end{pmatrix}, \quad U_r^* = \begin{pmatrix} w_{1,r} \\ w_{2,r} \\ w_{3,l} \end{pmatrix}, \quad U_r = \begin{pmatrix} w_{1,r} \\ w_{2,r} \\ w_{3,r} \end{pmatrix}$$

Valeurs propres	Mult.	Invariants de Riemann
λ_1	1	$w_2, \quad w_3$
λ_2	1	$w_1, \quad w_3$
λ_3	1	$w_1, \quad w_2$

Autre système LD : relaxation de type Suliciu

Système d'Euler isentropique

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0,$$
$$\partial_t \rho u + \partial_x \left(\rho u^2 + p\right) = 0.$$

Équation sur ρp

$$\partial_t \rho p + \partial_x(\rho p\, u) + \rho^2 p'(\rho)\, \partial_x u = 0,$$

Système non linéairement dégénéré

$$u - \sqrt{p'(\rho)} \quad ; \quad u + \sqrt{p'(\rho)}$$

Système de relaxation
Nouvelle variable π

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0,$$
$$\partial_t \rho u + \partial_x \left(\rho u^2 + \pi\right) = 0$$

Définition de π

$$\partial_t \rho\pi + \partial_x(\rho p\, u) + c^2\, \partial_x u = 0,$$

Système linéairement dégénéré

$$u - \sqrt{\rho^{-2}\, c^2} \quad ; \quad u + \sqrt{\rho^{-2}\, c^2}$$

Résolution pb de Riemann

$$V = (\rho, u, \pi) \in \mathbb{R}^3$$

V. P.	Mult.	Invariants de Riemann
$\lambda_1 = u_l - \frac{a_l}{\rho_l}$	1	$\frac{1}{\rho} + \frac{\pi}{a^2}, \quad \pi + au$
$\lambda_2 = u_l^* = u_r^r$	1	π
$\lambda_3 = u_r + \frac{a_r}{\rho_r}$	1	$\frac{1}{\rho} + \frac{\pi}{a^2}, \quad \pi - au$

$$u_l^* = u_r^* := u^* \qquad \pi_l^* = \pi_r^* := \pi^*$$

$$(\pi + au)_l^* = (\pi + au)_l \qquad (\pi - au)_r^* = (\pi - au)_r$$

$$\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\pi}{a^2}\right)_l^* = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\pi}{a^2}\right)_l \qquad \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\pi}{a^2}\right)_r^* = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\pi}{a^2}\right)_r$$

$$\pi^* + a_l u^* = \pi_l + a_l u_l$$

$$\pi^* + a_r u^* = \pi_r + a_r u_r$$

on en déduit π^* et u^*, puis $1/\rho_l^*$, $1/\rho_r^*$.

Relaxation type Suliciu pour le système nonconservatif MHD biT

Système MHD bi-température

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\rho + u_1\partial_x\rho + \rho\partial_x u_1 = 0,\\
&\partial_t u_1 + u_1\partial_x u_1 + \rho^{-1}\partial_x(\boxed{p_e} + \boxed{p_i} + B_3^2/2) = 0,\\
&\partial_t u_2 + u_1\partial_x u_2 = 0,\\
&\partial_t B_3 + B_3\partial_x u_1 + u_1\partial_x B_3 = 0,\\
&\partial_t\,\varepsilon_e + u_1\partial_x\varepsilon_e + \rho_e^{-1}\boxed{p_e}\,\partial_x u_1 = 0,\\
&\partial_t\,\varepsilon_i + u_1\partial_x\varepsilon_i + \rho_i^{-1}\boxed{p_i}\,\partial_x u_1 = 0.
\end{aligned}
$$

É quation sur $\boxed{p_e}$ et $\boxed{p_i}$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \boxed{p_e} + u_1\partial_x p_e + \boxed{\gamma_e p_e}\,\partial_x u_1 = 0,\\
&\partial_t \boxed{p_i} + u_1\partial_x p_i + \boxed{\gamma_i p_i}\,\partial_x u_1 = 0,
\end{aligned}
$$

Système non linéairement dégénéré

$$u;\, u \pm \sqrt{\rho^{-2}(\gamma_e\rho p_e + \gamma_i\rho p_i + \rho B_3^2)}$$

Système de relaxation
Nouvelles variables $\boxed{\pi_e}$ et $\boxed{\pi_i}$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\rho + u_1\partial_x\rho + \rho\partial_x u_1 = 0,\\
&\partial_t u_1 + u_1\partial_x u_1 + \rho^{-1}\partial_x(\boxed{\pi_e} + \boxed{\pi_i} + B_3^2/2) = 0,\\
&\partial_t u_2 + u_1\partial_x u_2 = 0,\\
&\partial_t B_3 + B_3\partial_x u_1 + u_1\partial_x B_3 = 0,\\
&\partial_t\,\varepsilon_e + u_1\partial_x\varepsilon_e + \rho_e^{-1}\boxed{\pi_e}\,\partial_x u_1 = 0,\\
&\partial_t\,\varepsilon_i + u_1\partial_x\varepsilon_i + \rho_i^{-1}\boxed{\pi_i}\,\partial_x u_1 = 0,
\end{aligned}
$$

Définition de $\boxed{\pi_e}$ et $\boxed{\pi_i}$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \boxed{\pi_e} + u_1\partial_x\pi_e + \boxed{\frac{c_e}{\rho}(a^2 - \rho B_3^2)}\,\partial_x u_1 = 0,\\
&\partial_t \boxed{\pi_i} + u_1\partial_x\pi_i + \boxed{\frac{c_i}{\rho}(a^2 - \rho B_3^2)}\,\partial_x u_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Système linéairement dégénéré

$$u;\, u \pm \sqrt{\rho^{-2}\; a^2}$$

Résolution pb de Riemann

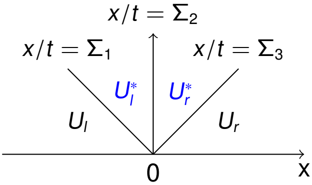
$$V = (\rho, u_1, \varepsilon_e, \varepsilon_i, B_3, \pi_e, \pi_i) \in \mathbb{R}^7$$

Valeurs propres	Mult.	Invariants de Riemann
$\lambda_1 = u_l - \dfrac{a_l}{\rho_l}$	1	$B_3/\rho, \quad w_{1,e}, \quad w_{1,i}, \quad w_{2,e}, \quad w_{2,i}$
$\lambda_2 = u_l^* = u_r^r$	5	$\pi_e + \pi_i + B_3^2/2$
$\lambda_3 = u_r + \dfrac{a_r}{\rho_r}$	1	$B_3/\rho, \quad w_{1,e}, \quad w_{1,i}, \quad w_{2,e}, \quad w_{2,i}$

avec

$$w_{1,\alpha} = \pi_\alpha + c_\alpha B_3^2/2 + \frac{a^2 c_\alpha}{\rho}, \quad w_{2,\alpha} = \varepsilon_\alpha + \frac{B_3^2}{2\rho} - \frac{\left(\pi_\alpha + c_\alpha B_3^2/2\right)^2}{2(c_\alpha\, a)^2}.$$

On résout explicitement les états intermédiaires.



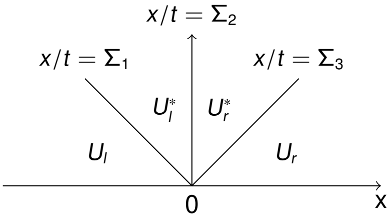
Produit non-conservatif

On remarque que

$$c_i w_1 - c_e w_2 = \boxed{c_i \pi_e - c_e \pi_i}$$

Donc $\boxed{c_i \pi_e - c_e \pi_i}$ est un invariant de Riemann pour les discontinuités extrêmes.

Donc le produit nonconservatif $u \boxed{\partial_x \left(c_i \pi_e - c_e \pi_i \right)}$ est bien défini



Domaine convexe d'admissibilité

$$\Omega = \left\{ \left(\rho, \rho u, B_3, \widetilde{\mathcal{E}_e}, \widetilde{\mathcal{E}_i}\right) \in \mathbb{R}^5,\ \rho \geq 0, \epsilon_e \geq 0, \epsilon_i \geq 0 \right\}$$

U_i^{n+1} est une combinaison convexe des états intermédiaires.
Condition suffisante

$$U_l^*, U_r^* \in \Omega.$$

condition sous-caractéristique sur la vitesse de relaxation speed a

$$a^2 \geq \rho B_3^2 + \rho \max(a_e^2, a_i^2), \quad a_\alpha = \sqrt{\frac{\gamma_\alpha p_\alpha}{\rho_\alpha}}$$

implique $\rho_l^* \geq 0$, $\rho_r^* \geq 0$.

$$a \geq \max\left(\frac{|\pi_e + c_e B_3^2/2|}{2c_e \sqrt{\varepsilon_e}}, \frac{|\pi_i + c_i B_3^2/2|}{2c_i \sqrt{\varepsilon_i}} \right)$$

implique $\varepsilon_{i,l}^* \geq 0$, $\varepsilon_{e,l}^* \geq 0$, $\varepsilon_{i,r}^* \geq 0$, $\varepsilon_{e,l}^* \geq 0$.

Stabilité du schéma

Inégalité d'entropie

$$\partial_t \eta(U) + \partial_x G(U) \leq 0$$

MHD bitempérature

$$\eta(U) = -\rho c_e \, s_e \;\; - \;\; \rho c_i \, s_i$$

$$s_e = \ln\left(\frac{p_e}{\rho_e^\gamma}\right), \quad s_i = \ln\left(\frac{p_i}{\rho_i^\gamma}\right),$$

$$G(U) = u_1 \eta(U)$$

Résultat : Inégalité d'entropie discrète

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\eta(U_i^{n+1}) - \eta(U_i^n)\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(G(U_i^n, U_{i+1}^n) - G(U_{i-1}^n, U_i^n)\right) \leq 0$$

avec flux d'entropie numérique satisfaisant $G(U, U) = G(U)$.

Cadre général

Inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}\eta(U_i^{n+1}) \leq & \frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x/2} \eta(R(x/\Delta t, U_{i-1}, U_i))dx \\ & + \frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{0} \eta(R(x/\Delta t, U_i, U_{i+1}))dx \\ & = \eta(U_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(G_l(U_i, U_{i+1}) - G_r(U_{i-1}, U_i)\right)\end{aligned}$$

On dit que le sovleur est entropique si

$$G_r(U_l, U_r) \leq G_l(U_l, U_r).$$

Dans ce cas pour tout flux numérique $G(U_l, U_r)$ tel que

$$G_r(U_l, U_r) \leq G(U_l, U_r) \leq G_l(U_l, U_r),$$

le schéma vérifie une inégalité d'entropie discrète.

Entropie étendue pour les modèles de relaxation

On dit que $\mathcal{H}(U)$ est une entropie étendue de $\eta(U)$ s'il exsite $\mathcal{G}(U)$ telle que

$$\mathcal{G}'(U) = \mathcal{H}'(U)\mathcal{A}'(U)$$

$$\mathcal{H}(M(U)) = \eta(U)$$

$$\mathcal{G}(M(U)) = G(U)$$

Principe du minimum d'entropie

$$\mathcal{H}(M(U)) \leq \mathcal{H}(f), \quad \forall U = Lf$$

Propriété :

Soit $\mathcal{H}$ une entropie étendue de η,
$\mathcal{R}$ solveur du système de relaxation,
$R = L\mathcal{R}(., M(U_l), M(U_r))$ solveur du système de départ

Si	$\mathcal{R}$ est $\mathcal{H}$ - entropique	$(\mathcal{G}_r - \mathcal{G}_l \leq 0)$
Alors	R est η - entropique	$(G_r - G_l \leq 0)$.

Bibliographie

- 1994, [Chen, Levermore, Liu]
- 1999, 2004, [Bouchut]
- 2011, [Bouchut, Klingenberg, Waagan]
- 2012, 2015, [Berthon, Dubroca, Sangam]
- 2013, [Bouchut, Boyaval]
- 2016 [Bouchut, L]

Preuve d'inégalité d'entropie pour la MHD biT

Etapes de la preuve

- condition sous-caractéristique suffisante pour effectuer localement un changement de variable sur les invariants de Riemann

$$\begin{aligned}
\varphi_e(\tau, \varepsilon_e, B_3, \pi) &= \pi + c_e B_3^2/2 + a^2 c_e \tau \\
\phi_e(\tau, \varepsilon_e, B_3, \pi) &= \varepsilon_e + \tau B_3^2/2 - \frac{(\pi + c_e B_3^2/2)^2}{2(c_e a)^2} \\
\psi_e(\tau, \varepsilon_e, B_3, \pi) &= \tau B_3
\end{aligned}$$

- ce changement de variable permet de prouver l'existence d'une entropie étendue

$$\max_{\pi \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_\alpha\left(\phi(\Sigma), \varphi(\Sigma), \psi(\Sigma)\right) = \mathcal{S}_\alpha\left(\phi(\Sigma), \varphi(\Sigma), \psi(\Sigma)\right)|_{\pi = p_\alpha(\tau, \varepsilon_\alpha)} = s_\alpha(\tau, \varepsilon_\alpha).$$

Preuve d'inégalité d'entropie pour la MHD biT

Sous condition sous-caractérique, on peut définir

$$S(\Sigma) = s_\alpha\left(\bar{\tau}\left(\phi(\Sigma), \varphi(\Sigma), \psi(\Sigma)\right), \bar{\varepsilon}_\alpha\left(\phi(\Sigma), \varphi(\Sigma), \psi(\Sigma)\right)\right),$$

$$\text{avec } \bar{\tau}\left(\phi(\Sigma), \varphi(\Sigma), \psi(\Sigma)\right)|_{\pi=p(\tau,\varepsilon_\alpha)} = \tau \;\text{ et }\; \bar{\varepsilon}_\alpha\left(\phi(\Sigma), \varphi(\Sigma), \psi(\Sigma)\right)|_{\pi=p(\tau,\varepsilon_\alpha)} = \varepsilon_\alpha,$$

On veut montrer que $\pi \mapsto \dfrac{\partial S}{\partial \pi}(\Sigma)$admet un unique maximum en $\pi = p$.
Après quelques calucls, on obtient

$$\frac{\partial S}{\partial \pi}(\Sigma) = \frac{\left(p_\alpha(\bar{\tau}, \bar{\varepsilon}_\alpha) + \bar{B}_3^2/2\right) - \left(\pi + B_3^2/2\right)}{a^2 \bar{\varepsilon}_\alpha},$$

On obtient donc bien que $\pi = p$ est un extremum. Est-il l'unique maximum ?
Oui et pour le vérifier on dérive une deuxième fois !

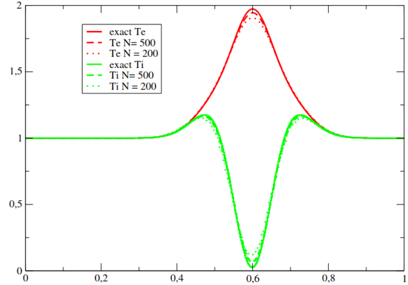
Tests numériques

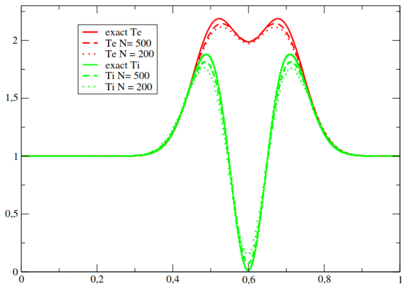
Test avec solution régulière analytique

Conditions initiales

$$\begin{array}{ll} \rho(x,0) = 1, & u_1(x,0) = 10, \\ T_e(x,0) = 1 + \exp(-200(x-1/2)^2), & T_i(x,0) = 2 - T_e(x,0), \\ B_3(x,0) = \exp(-50(x-1/2)^2). & \end{array}$$

Résultats au temps $t = 0.5$.





Problèmes de Riemann

Référence pour Euler mono-température conservatif

E. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*, 1997.

Nouveaux cas tests bitempérature nonconservatif

Test	ρ	u	B_3	T_e	T_i
Test 1 left	1	0.75	0.8164966	0.3336667	0.3336667
Test 1 right	0.125	0	0.2581989	0.2669333	0.2669333
Test 2 left	1	-2	0.5163978	0.1334667	0.1334667
Test 2 right	1	2	0.5163978	0.1334667	0.1334667
Test 3 left	1	0	14.142136	100.10000	100.1
Test 3 right	1	0	0.2581989	0.0333667	0.0333667
Test 4 left	5.9999924	19.5975	17.528909	25.630859	25.630860
Test 4 right	5.9999242	-6.19633	5.5434646	2.5634264	2.5634266
Test 5 left	1	-19.5975	8.1649658	33.366665	33.366667
Test 5 right	1	-19.5975	0.2581989	0.0333667	0.0333667
Test 6 left	1.4	0	0.8164966	0.2383333	0.2383333
Test 6 right	1	0	0.8164966	0.3336667	0.3336667
Test 7 left	1.4	0.1	0.8164966	0.2383333	0.2383333
Test 7 right	1	0.1	0.8164966	0.3336667	0.3336667

Discrétisation naïve pour comparaison

Les termes non-conservatifs s'écrivent

$$u\partial_x(c_i p_e - c_e p_i)$$

Schéma HLL non conservatif (ncHLL)

HLL partie flux conservatif + approximation terme NC avec $u = cst$ sur chaque maille.

$$F_l^{\mathcal{E}_e}(U_l, U_r) = F_{HLL}^{\mathcal{E}_e}(U_l, U_r) \quad -u_r(\phi_r - \phi_l)$$

$$F_r^{\mathcal{E}_e}(U_l, U_r) = F_{HLL}^{\mathcal{E}_e}(U_l, U_r) \quad -u_l(\phi_r - \phi_l)$$

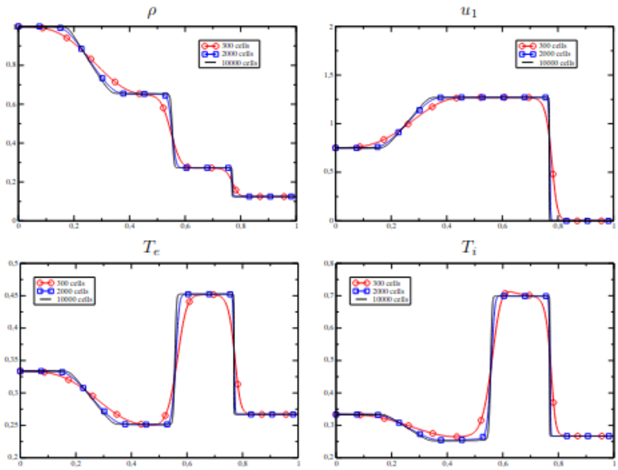
avec $\phi = c_i p_e - c_e p_i$.

Comparaison Suliciu et ncHLL

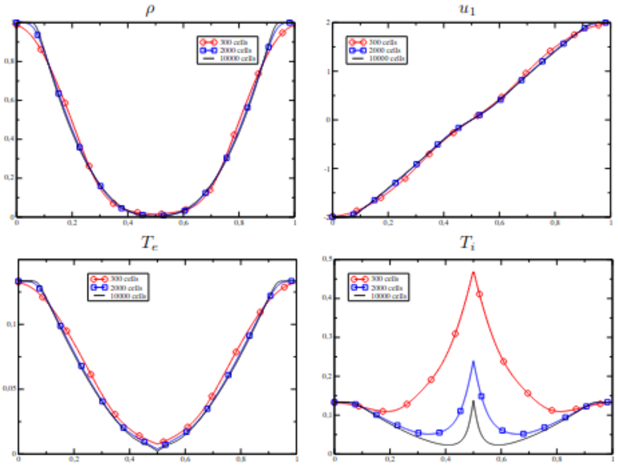
Est-ce que le code renvoie un résultat, sur un maillage 1D assez grossier $N = 300$?

	Suliciu	ncHLL
Test 1	$\surd$	$\surd$
Test 2	$\surd$	$\emptyset$
Test 3	$\surd$	$\surd$
Test 4	$\surd$	$\surd$
Test 5	$\surd$	$\emptyset$
Test 6	$\surd$	$\surd$
Test 7	$\surd$	$\surd$

Test 1 Suliciu

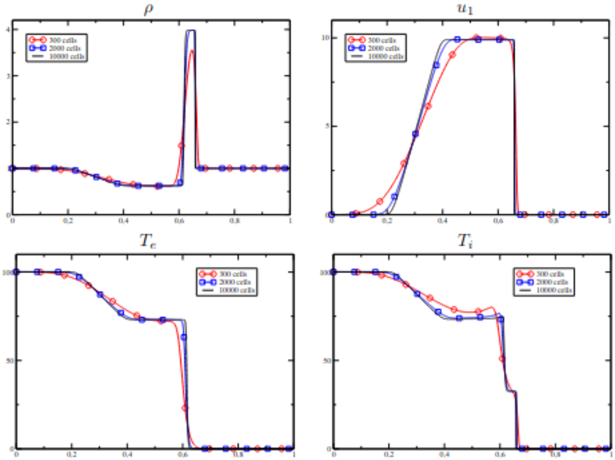


right shock wave, a right travelling contact and a left sonic rarefaction wave



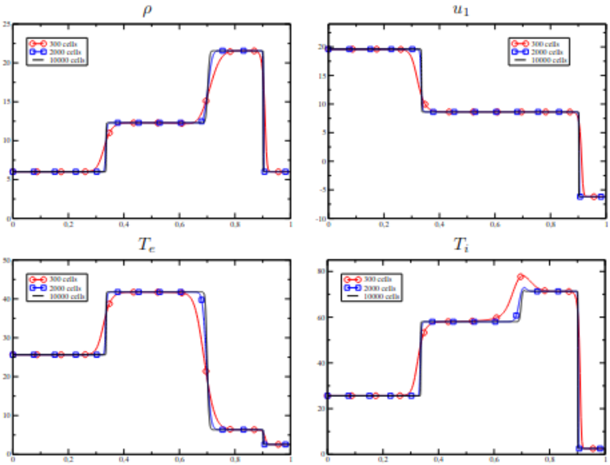
two symmetric rarefaction waves travelling in opposite direction and a trivial contact wave

Test 3 Suliciu

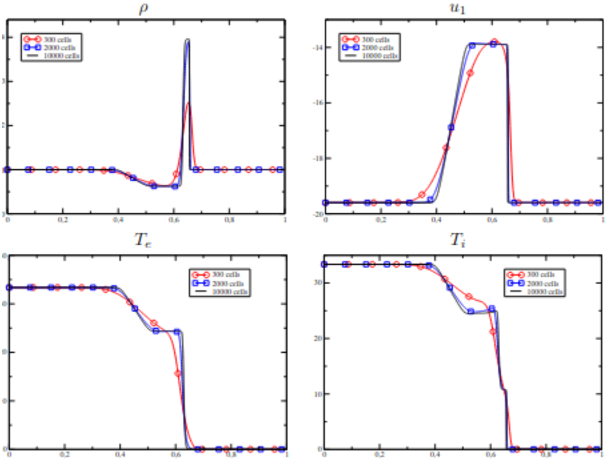


a strong wave of shock, a contact surface and a left rarefaction wave

Test 4 Suliciu

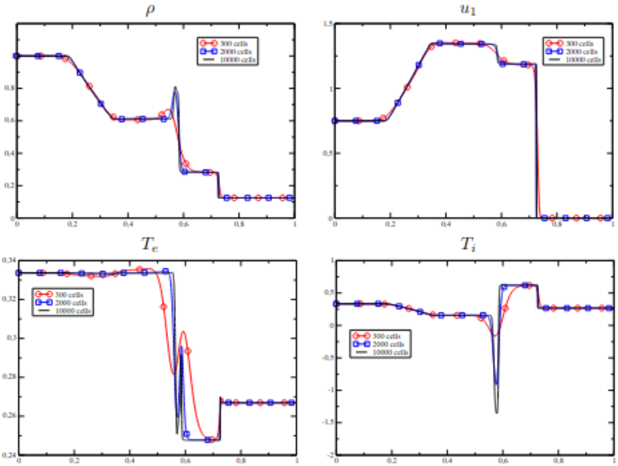


three strong discontinuities travelling to the right



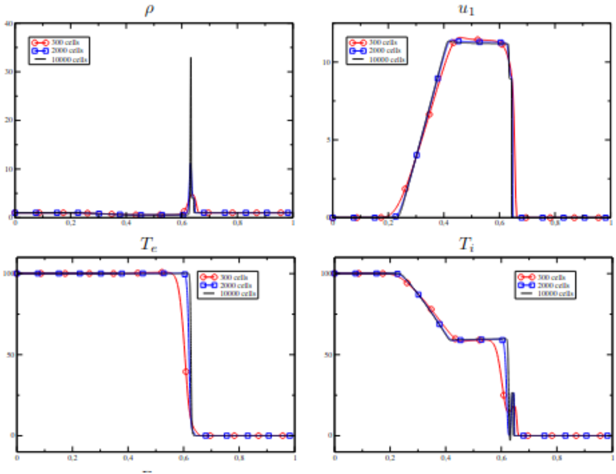
left rarefaction rarefaction wave, a right-travelling shock wave and a stationary contact discontinuity

Test 1 ncHLL



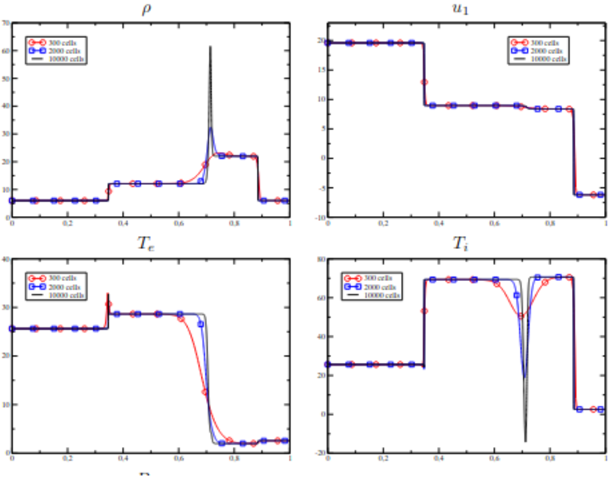
right shock wave, a right travelling contact and a left sonic rarefaction wave

Test 3 ncHLL



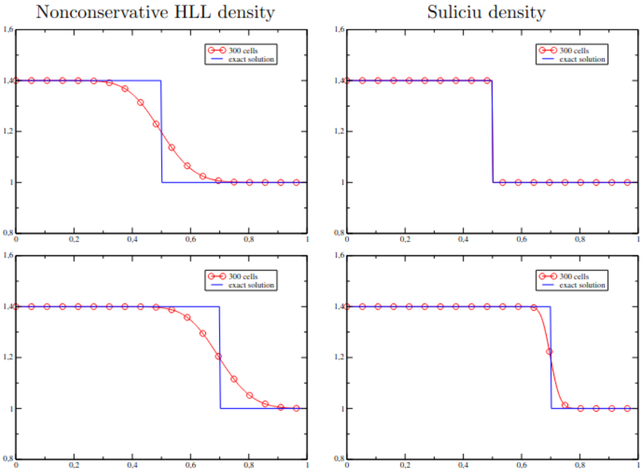
a right strong wave of shock, a right contact surface and a left rarefaction wave

Test 4 ncHLL



three strong discontinuities travelling to the right

Test 6 et 7 Suliciu et ncHLL



On the left, test 6 is an isolated stationary contact wave.
On the rigt, test 7 is an isolated contact moving slowly to the right.

Conclusion

- A partir d'un modèle cinétque conservatif couplé aux équations de Maxwell, on obtient par limite hydrodynamique un modèle MHD bi-température non-conservatif.
- Construction d'un schéma volumes finis grâce à la résolution d'un système de relaxation LD.
  Pour ce système de relaxation les produits non-conservatifs deviennent bien définis.
- Sous conditions CFL sous-charactéristiques
  - le schéma préserve la positivité des densités et des énergies internes électroniques et ioniques
  - le schéma satisfait une inégalité d'entropie discrète.
- Comparaison avec une discrétisation nc HLL
  - si le schéma positif entropique, observe CV numérique,
  - si le schéma n'est pas positif entropique, pas de CV numérique.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !