

Schémas de relaxation pour des systèmes conservatifs et non conservatifs

Denise Aregba-Driollet

Bordeaux-INP, Institut de Mathématiques de Bordeaux.

Plan de l'exposé

- ▶ Exemples physiques
- ▶ Cadre formel général pour les systèmes hyperboliques
- ▶ Résultats de convergence
- ▶ Schémas de relaxation pour les lois de conservation
- ▶ Schémas de relaxation pour des systèmes non conservatifs

Exemple physique 1: élastodynamique isotherme

Dafermos 1999, Tzavaras 1997

Matériau à mémoire:

$$\text{Suliciu} \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \partial_x v^\varepsilon = 0 \\ \partial_t v^\varepsilon - \partial_x \sigma^\varepsilon = 0 \\ \partial_t \sigma^\varepsilon - E \partial_x v^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (g(u^\varepsilon) - \sigma^\varepsilon) \end{cases}$$

σ^ε : contrainte. Système **semi-linéaire**.

$\varepsilon \rightarrow 0$: pas de mémoire $\sigma = g(u)$.

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x v = 0 \\ \partial_t v - \partial_x g(u) = 0 \end{cases}$$

p-système avec des champs caractéristiques **vraiment non linéaires**.

Exemple physique 2 : les systèmes de Kerr et Kerr-Debye en optique non linéaire

Hanouzet-Huynh 2000, thèse Kanso 2012, A-D 2015

Equations de Maxwell dans un crystal. $\tau > 0$: temps de réponse du matériau.

$$\text{Kerr - Debye} \quad \begin{cases} \partial_t D^\tau - \text{rot} H^\tau = 0 \\ \partial_t H^\tau + \mu_0^{-1} \text{rot} \left(\frac{D^\tau}{\epsilon_0(1 + \chi^\tau)} \right) = 0 \\ \partial_t \chi^\tau = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\epsilon_r |D^\tau|^2}{\epsilon_0^2 (1 + \chi^\tau)^2} - \chi^\tau \right) \end{cases}$$

Système hyperbolique avec tous les champs caractéristiques linéairement dégénérés.

$\tau \rightarrow 0$: système hyperbolique avec des champs VNL et des champs LD

$$\text{Kerr} \quad \begin{cases} \partial_t D - \text{rot} H = 0 \\ \partial_t H + \mu_0^{-1} \text{rot} \mathbf{P}(D) = 0 \end{cases}$$

Le modèle BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) pour les équations d'Euler - 1954

Simplification de l'équation de Boltzmann pour un gaz homogène.
 $f(x, t, \xi)$: fonction de distribution.

$$\partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (M(Pf^\varepsilon, \xi) - f^\varepsilon), \quad Pf^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \frac{1}{2}|\xi|^2 \end{pmatrix} f^\varepsilon d\xi.$$

Equation de transport linéaire + Terme source.

ε : proportionnel au nombre de Knudsen.

$\varepsilon \rightarrow 0$

$$f^\varepsilon \rightarrow f = M(U), \quad U = Pf$$

et U est solution des équations d'Euler.

Intérêt numérique de la relaxation

Dans les trois cas:

1. Le système de relaxation et le système relaxé sont hyperboliques
2. Le modèle de relaxation est semi-linéaire ou totalement linéairement dégénéré: **plus facile à approcher** que le modèle relaxé.

Idée: pour un système hyperbolique non linéaire donné

1. Trouver un système de relaxation associé (**paramètre ε**)
2. Schéma à ε fixé (**schéma de relaxation**)
3. Le **schéma relaxé** : $\varepsilon \rightarrow 0$ **dans le schéma**

Schéma **Asymptotic Preserving (AP)** si le schéma relaxé approche bien le système relaxé.

Cadre formel général pour les systèmes hyperboliques

Chen-Levermore-Liu, CPAM 1994 pour la relaxation:

$$\partial_t V^\varepsilon + \operatorname{div} f(V^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} R(V^\varepsilon) = 0 \rightarrow \partial_t U + \operatorname{div} F(U) = 0$$

avec $V^\varepsilon(x, t) \in \mathbb{R}^N$, $U(x, t) \in \mathbb{R}^K$,

$$U = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q V^\varepsilon, \quad Q \in \mathcal{M}_{K,N}(\mathbb{R}).$$

- ▶ Condition sous-caractéristique
- ▶ Développement de Chapman-Enskog
- ▶ Compatibilité des entropies

Bouchut, J. of Stat. Phys 1999 pour les modèles BGK: même programme.

Remarque

Les modèles BGK généraux n'entrent pas dans le cadre de Chen-Levermore-Liu mais les **BGK à répartition discrète de vitesse** en font partie.

Exemple: Broadwell

$$\begin{cases} \partial_t f_1 - \partial_x f_1 = \frac{1}{\varepsilon} (f_2^2 - f_1 f_3) \\ \partial_t f_2 = -\frac{1}{\varepsilon} (f_2^2 - f_1 f_3) \\ \partial_t f_3 + \partial_x f_3 = \frac{1}{\varepsilon} (f_2^2 - f_1 f_3) \end{cases}$$

On pose $\rho = f_1 + 2f_2 + f_3$, $\rho v = q = -f_1 + f_3$, $\pi = f_1 + f_2$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x \pi = 0 \\ \partial_t \pi + \partial_x(\rho v) = \frac{\rho}{2\varepsilon} \left(-\pi + \frac{1}{2}(\rho + \rho v^2) \right) \end{cases}$$

Une classe de modèles de relaxation de type BGK pour les systèmes de lois de conservation

Natalini 1996, A-D et Natalini 1996, Natalini 1998, A-D et Natalini 2000 Systèmes multi-D. Ici: 1-D.

Soit un système de lois de conservation

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

avec $U(x, t) \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^K$. Système BGK associé:

$$\partial_t f^\varepsilon + \Lambda \partial_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (M(Pf^\varepsilon) - f^\varepsilon), \quad f^\varepsilon(x, t) \in \mathbb{R}^N.$$

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

$P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^K)$, and $M = (M_1, \dots, M_N): \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Conditions de compatibilité

$$\partial_t f^\varepsilon + \Lambda \partial_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (M(Pf^\varepsilon) - f^\varepsilon), \quad f^\varepsilon(x, t) \in \mathbb{R}^N.$$

$$\forall U \in \mathcal{V}, \quad PM(U) = U, \quad P\Lambda M(U) = F(U).$$

On pose $U^\varepsilon = Pf^\varepsilon$:

$$\partial_t U^\varepsilon + \partial_x (P\Lambda f^\varepsilon) = 0.$$

Si $f^\varepsilon \rightarrow f$: $f = M(Pf)$ et donc $U = Pf$ est solution du système

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

Théorèmes de convergence pour les solutions faibles entropiques:

- ▶ Cas scalaire ($U(x, t) \in \mathbb{R}$): [Natalini 1998](#). Méthodes de monotonie
- ▶ Systèmes: [Serre 2000](#), [Bouchut 1999](#)

Premier exemple: $N = 2K$

$$P = (I_K, I_K), \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 I_K, \lambda_2 I_K)$$

On note $g_1 = (f_1, \dots, f_K)$, $g_2 = (f_{K+1}, \dots, f_{2K})$,

$$M_1(U) = \frac{\lambda_2 U - F(u)}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad M_2(U) = \frac{-\lambda_1 U + F(u)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\partial_t g_l + \lambda_l \partial_x g_l = \frac{1}{\varepsilon} (M_l(U) - g_l), \quad l = 1, 2$$

Système de **2K inconnues**. $U = g_1 + g_2$, $V = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$:

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x V = 0 \\ \partial_t V + \partial_x (-\lambda_1 \lambda_2 U + (\lambda_1 + \lambda_2) V) = \frac{1}{\varepsilon} (F(U) - V) \end{cases}$$

Pour $\lambda_1 = -\lambda$, $\lambda_2 = \lambda > 0$ c'est le système de **relaxation de Jin et Xin (1995)**

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x V = 0 \\ \partial_t V + \lambda^2 \partial_x U = \frac{1}{\varepsilon} (F(U) - V) \end{cases}$$

Stabilité avec la **condition sous-caractéristique**:

$$\sigma(F'(u)) \subset]-\lambda, \lambda[$$

Pour toute entropie du système relaxé, il existe une entropie dissipative associée du système BGK: convergence vers les solutions faibles entropiques.

Deuxième exemple: Suliciu

$$U = (\rho, q), \quad F(\rho, q) = (q, p(\rho)).$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \partial_x q^\varepsilon = 0 \\ \partial_t q^\varepsilon + \partial_x \pi^\varepsilon = 0 \\ \partial_t \pi^\varepsilon + \lambda^2 \partial_x q^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (p(\rho^\varepsilon) - \pi^\varepsilon) \end{cases}$$

Système relaxé:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x p(\rho) = 0 \end{cases}$$

Ce système est hyperbolique si $p'(\rho) > 0$ et dans ce cas les valeurs propres de $F'(U)$ sont $\pm \sqrt{p'(\rho)}$.

Forme BGK du système de Suliciu: $K = 2$, $N = 3$

$$\partial_t f + \Lambda \partial_x f = \frac{1}{\varepsilon} (M(Pf) - f)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \text{diag}(-\lambda, 0, \lambda)$$

et

$$M_1(h, q) = \frac{\rho(\rho) - \lambda q}{2\lambda^2}$$
$$M_2(h, q) = \frac{-\rho(\rho)}{\lambda^2} + h$$
$$M_3(h, q) = \frac{\rho(\rho) + \lambda q}{2\lambda^2}$$

Condition de stabilité: $\lambda \geq \sqrt{\rho'(\rho)}$.

Schémas de relaxation pour les lois de conservation

A partir du système de relaxation, on construit une méthode numérique AP. Pour les BGK discrets:

- ▶ Volumes finis [A-D et Natalini 2000](#)
- ▶ Eléments finis [Arvanitis, Katsaounis, Makridakis 2001](#)
- ▶ Lattice Boltzmann [Graille 2014, Courtès, Coulette, Franck, Navoret 2018](#)
- ▶ Residual Distribution Schemes [Abgrall et Torlo 2020](#)
- ▶ DG [Coulette, Franck, Helluy, Mehrenberger, Navoret, 2019](#)
- ▶ etc...

Méthode de base: projection-transport. U^n étant connu, on calcule d'abord les **fonctions cinétiques**

$$f^{n+\frac{1}{2}} = M(U^n)$$

Equations de transport libre:

$$f^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow f^{n+1}$$

Opérateur de **moment:**

$$U^{n+1} = Pf^{n+1}$$

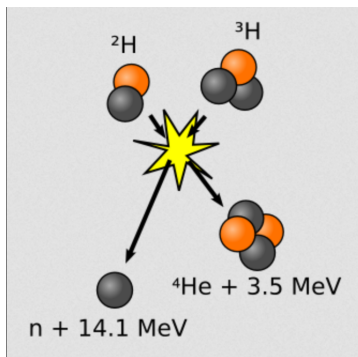
Un exemple de schéma de relaxation de type BGK pour un système non conservatif: le modèle d'Euler bitempérature

Collaborations:

- ▶ Stéphane Brull (IMB)
- ▶ Corentin Prigent dans le cadre de sa these IMB et CELIA (correspondant: Bruno Dubroca).

Le contexte physique

Expérience de fusion par confinement inertiel



Pour cela : lasers très puissants qui font vaporiser l'échantillon sous forme de **plasma**.

- Confinement de la matière dans un très petit volume
- Très hautes températures : 10^7 K
- Echelle de temps : 10^{-9} secondes
- Pendant un court laps de temps la température des ions diffère de celle des électrons

Système d'Euler pour un mélange avec ionisation $Z = \frac{n_e}{n_i}$ constante
(quasi-neutralité)

Notations: e : électrons, i : ions.

- c_e, c_i : fractions massiques

$$\rho_e = \rho c_e = m_e n_e, \quad \rho_i = \rho c_i = m_i n_i, \quad c_e + c_i = 1.$$

Conséquence: c_e et c_i sont constantes.

- $u = u_e = u_i$ (vitesses à l'équilibre)
- Energies ioniques and électroniques (températures hors équilibre)

$$\mathcal{E}_\beta = \rho_\beta \varepsilon_\beta + \frac{1}{2} \rho_\beta u^2, \quad \beta = e, i.$$

Système d'Euler non conservatif à deux espèces

2 lois de pression et 2 températures:

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha \mathcal{E}_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha, \quad \alpha = e, i.$$

Les équations:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x p_e + \nabla_x p_i = 0, \\ \partial_t \mathcal{E}_e + \nabla_x \cdot (u(\mathcal{E}_e + p_e)) - u \cdot (c_i \nabla_x p_e - c_e \nabla_x p_i) = \nu_{ei}(T_i - T_e), \\ \partial_t \mathcal{E}_i + \nabla_x \cdot (u(\mathcal{E}_i + p_i)) + u \cdot (c_i \nabla_x p_e - c_e \nabla_x p_i) = -\nu_{ei}(T_i - T_e), \end{cases}$$

[Coquel, Marmignon, 1998], [Coquel, Chalons, 2005]

Système **non conservatif** avec **termes sources**.

Si $\gamma_e = \gamma_i$ alors $(\rho, \rho u, \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_i)$ satisfait le système d'Euler

- Hyperbolicité: diagonalisable avec trois valeurs propres $u \cdot \omega$, $u \cdot \omega \pm a$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma_e p_e + \gamma_i p_i}{\rho}}$$

- [Aregba-Driollet, Breil, Brull, Estibals, Dubroca, 2018] Existence d'une entropie dissipative strictement convexe, compatible avec l'entropie d'un système cinétique sous-jacent:

$$\eta = \sum_{\alpha=e,i} \left(-\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha(\gamma_\alpha - 1)} \ln \frac{\rho_\alpha}{\rho_\alpha^{\gamma_\alpha}} \right), \quad Q = u\eta.$$

On a

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \operatorname{div}_x \cdot Q(\mathcal{U}) \leq -\frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e} (T_i - T_e)^2.$$

Une solution sera dite **admissible** si elle vérifie cette inégalité.

Solutions fortes : l'entropie ne fournit pas un symétriseur.

Rappel: pour un **système hyperbolique sous forme divergente**

$$\partial_t U + \operatorname{div} F(U) = Q(U)$$

η est une entropie strictement convexe si et seulement si $\eta''(U)F'_d(U)$ est symétrique pour tout $d = 1, \dots, D$.

Ici : $\partial_t U + \sum_{d=1}^D A_d(U) \partial_d U = Q(U)$ avec $A_d(U) \neq F'_d(U)$. Même pour $D = 1$

$\eta''(U)A(U)$ est symétrique si et seulement si $T_i = T_e$.

[Aregba-Driollet, Brull, Peng 2021]:

- Existence d'un symétriseur (et donc existence locale des solutions régulières)
- En 1D pour $\gamma_i \neq \gamma_e$: existence globale des solutions régulières pour le problème de Cauchy à données petites

Les solutions faibles sont physiques, ce sont celles qu'on veut approcher numériquement

Présence des termes $u \cdot \nabla(c_i p_e - c_e p_i)$:

- u continue (discontinuités de contact ou détente): OK.
- u discontinue (chocs) ? Définition théorique : [Dal Maso, Le Floch, Murat, 1995], [Berthon, Coquel, Le Floch, 2012]. Pour sélectionner les chocs admissibles il faut d'autres informations : termes de viscosité, système sous-jacent.

Ici: point de vue cinétique.

Schéma numérique : modèle BGK discret

- 1 Schémas fluides [Aregba-Driollet, Breil, Brull, Estibals, Dubroca, 2018]
 - Discrétisation et prise des moments du modèle cinétique (SC)
 - Relaxation des pressions (Suliciu)
 - Lagrange-projection (LP)
 - BGK discret (BGKD)
- 2 These de C. Prigent : Schéma DVM à partir du modèle cinétique précédent [Brull, Dubroca, Prigent, 2020] (DVM)

En l'absence de choc tous ces schémas ont les mêmes performances

(SC), (BGKD), (DVM) produisent les mêmes chocs

(BGKD) a une inégalité d'entropie discrète

Schéma 2D: VF sur un modèle cinétique de type BGK

Dimension 2 et 4 vitesses. $D = 2$ et $L = 4$.

Définition de P

$$\forall f \in (\mathbb{R}^K)^4, \quad Pf = \sum_{l=1}^4 f_l.$$

Définition des Maxwelliennes

$$M(U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-} \left(\frac{\lambda_1^+}{2} U - F_1(U) \right) \\ \frac{1}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-} \left(\frac{\lambda_2^+}{2} U - F_2(U) \right) \\ \frac{1}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-} \left(\frac{-\lambda_1^-}{2} U + F_1(U) \right) \\ \frac{1}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-} \left(\frac{-\lambda_2^-}{2} U + F_2(U) \right) \end{pmatrix}.$$

Condition sous caractéristique

$$\forall U \in \Omega, \sigma(F'_d(U)) \subset \left] \frac{\lambda_d^-}{2}, \frac{\lambda_d^+}{2} \right[, \quad d = 1, 2 \iff \forall U \in \Omega, \forall l \sigma(M'_l(U)) \subset]0, +\infty[.$$

Construction du modèle

On pose pour $f^\alpha \in (\mathbb{R}^4)^4$: $Pf^\alpha = U^\alpha = (\rho^\alpha, \rho^\alpha u^\alpha, \mathcal{E}^\alpha)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_l^{e,\varepsilon} + \sum_{d=1}^2 v_{d,l} \partial_{x_d} f_l^{e,\varepsilon} + \frac{q^e}{m^e} N(E^\varepsilon) f_l^{e,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (M_l^e(U^{e,\varepsilon}) - f_l^{e,\varepsilon}) + B_l^{ei}(f^{e,\varepsilon}, f^{i,\varepsilon}), \\ \partial_t f_l^{i,\varepsilon} + \sum_{d=1}^2 v_{d,l} \partial_{x_d} f_l^{i,\varepsilon} + \frac{q^i}{m^i} N(E^\varepsilon) f_l^{i,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (M_l^i(U^{i,\varepsilon}) - f_l^{i,\varepsilon}) + B_l^{ie}(f^{e,\varepsilon}, f^{i,\varepsilon}), \\ \cancel{-c^{-2} \partial_t E^\varepsilon} = \mu_0 \left(\frac{q^e}{m^e} \rho^{e,\varepsilon} u^{e,\varepsilon} + \frac{q^i}{m^i} \rho^{i,\varepsilon} u^{i,\varepsilon} \right), \\ \cancel{\varepsilon_0 \operatorname{div} E^\varepsilon} = \frac{q^e}{m^e} \rho^{e,\varepsilon} + \frac{q^i}{m^i} \rho^{i,\varepsilon} \\ \operatorname{rot} E^\varepsilon = 0 \end{array} \right.$$

$B^{\alpha\beta}$: terme source \Rightarrow interactions ions-électrons

$$PB^{\alpha\beta} \Rightarrow (0, 0, 0, v^{\alpha\beta}(T^\beta - T^\alpha)).$$

Limite quasi-neutre

$$\rho^e = c^e \rho, \quad \rho^i = c^i \rho, \quad u = u^e = u^i$$

Obtention du système fluide

Terme de force (analogue au terme $E \cdot \nabla_v f$ en modèle continu

$$\forall f_l \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad N(E)f = -(0, f_{l,1} E, f_{l,2} \cdot E)$$

et donc si $f = M^\alpha(U^\alpha)$ le moment s'écrit

$$N(E)U^\alpha = -(0, \rho^\alpha E, \rho^\alpha u \cdot E)$$

$$\partial_t \rho^\alpha + \nabla \cdot (\rho^\alpha u) = 0,$$

$$\partial_t (\rho^\alpha u) + \nabla \cdot (\rho^\alpha u \otimes u) + \nabla p^\alpha - \frac{q^\alpha}{m^\alpha} E \rho^\alpha = 0,$$

$$\partial_t \mathcal{E}^e + \nabla \cdot (u(\mathcal{E}^e + p^e)) - q^e m^e \rho^e u \cdot E = v^{ei}(T^i - T^e),$$

$$\partial_t \mathcal{E}^i + \nabla \cdot (u(\mathcal{E}^i + p^i)) - q^i m^i \rho^i u \cdot E = -v^{ei}(T^i - T^e).$$

Loi d'Ohm:

$$\frac{\rho^i q^i}{m^i} E = -\frac{\rho^e q^e}{m^e} E = -c^i \nabla p^e + c^e \nabla p^i.$$

Entropies cinétiques

Les maxwelliennes sont de la forme

$$M_l^\alpha(U^\alpha) = \theta_l U^\alpha + \zeta \cdot F^\alpha(U^\alpha), \quad 1 \leq l \leq 4, \quad \alpha = e, i,$$

avec $\theta_l \in \mathbb{R}$ et $\zeta \in \mathbb{R}^2$. On pose pour toute paire entropie-flux (η^α, Q^α) :

$$G_l^\alpha(U) = \theta_l \eta^\alpha(U) + \zeta_l \cdot Q^\alpha(U).$$

Si la condition **sous-caractéristique** est vérifiée alors M_l^α est bijective et on a les entropies cinétiques

$$H_l^\alpha(f_l^\alpha) = G_l^\alpha((M_l^\alpha)^{-1}(f_l^\alpha)).$$

- H_l^α est convexe. (E0)
- $\sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(M_l^\alpha(U^\alpha)) = \eta^\alpha(U^\alpha)$. (E1)
- $\sum_{l=1}^4 V_l H_l^\alpha(M_l^\alpha(U^\alpha)) = Q^\alpha(U^\alpha)$. (E2)
- si $U_f = P(f)$, $\sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(M_l^\alpha(U_f)) \leq \sum_{l=1}^4 H_l^\alpha(f_l)$. (E3)

Si \mathcal{U} est une solution d'Euler bi-température obtenue comme limite du modèle BGK discret alors c'est une solution admissible:

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \operatorname{div}_x \cdot Q(\mathcal{U}) \leq -\frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e} (T_i - T_e)^2.$$

Obtention du schéma d'ordre 1

Δx_1 et Δx_2 : pas d'espace, Δt pas de temps, $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Pour toute inconnue $v(x_1, x_2, t)$, v_j^n : approximation au temps t^n sur la cellule $C_j =]x_{1,j_1-\frac{1}{2}}, x_{1,j_1+\frac{1}{2}}[\times]x_{2,j_2-\frac{1}{2}}, x_{2,j_2+\frac{1}{2}}[$. Supposons $\mathcal{U}_j^n = (\rho_j^n, \rho_j^n u_j^n, \mathcal{E}_{e,j}^n, \mathcal{E}_{i,j}^n)$ connu.

Etape 1: Définition de $f_j^{\alpha,n}$ comme

$$U_j^{\alpha,n} = (c^\alpha \rho_j^n, c^\alpha \rho_j^n u_j^n, \mathcal{E}_j^{\alpha,n}), \quad f_j^{\alpha,n} = M^\alpha(U_j^{\alpha,n}), \quad j \in \mathbb{Z}^2, \quad \alpha = e, i.$$

Etape 2: Résolution d'un système d'équations de transport linéaires:

$$\partial_t f^\alpha + \sum_{d=1}^2 \Lambda_d \partial_{x_d} f^\alpha = 0$$

par schéma upwind

Puis on applique P .

Etape 3: Schéma implicite

Discretisation des termes non conservatifs

$$u \cdot \nabla_x (c_e p_i - c_i p_e) \iff u_j^{n+1} \cdot \sum_{d=1}^2 \frac{1}{\Delta x_d} \left(\delta_{j+\frac{e_d}{2}}^n - \delta_{j-\frac{e_d}{2}}^n \right)$$

où

$$\delta_{j+\frac{e_d}{2}}^n = -c^i F_{j+\frac{e_d}{2},2}^{e,n} + c^e F_{j+\frac{e_d}{2},2}^{i,n} \in \mathbb{R}^2.$$

L'approximation des termes non conservatifs est consistante avec

$$\delta_{j+\frac{e_d}{2}}^n = \delta_d(\mathcal{U}_j^n, \mathcal{U}_{j+e_d}^n), \quad \delta(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = (-c^i p^e + c^e p^i)l.$$

⇒ Approximation de la loi d'Ohm

Approximation des termes non conservatifs

$$\delta_{j+\frac{e_d}{2}}^n = \begin{cases} (-c_i p_{j+e_d}^{e,n} + c_e p_{j+e_d}^{i,n}) e_d & \text{si } \lambda_d^- < \lambda_d^+ \leq 0, \\ (-c_i p_j^{e,n} + c_e p_j^{i,n}) e_d & \text{si } 0 \leq \lambda_d^- < \lambda_d^+, \\ \left(\frac{\lambda_d^+}{\lambda_d^+ - \lambda_d^-} (-c^i p_j^{e,n} + c^e p_j^{i,n}) - \frac{\lambda_d^-}{\lambda_d^+ - \lambda_d^-} (-c^i p_{j+e_d}^{e,n} + c^e p_{j+e_d}^{i,n}) \right) e_d & \text{if } \lambda_d^- < 0 < \lambda_d^+. \end{cases}$$

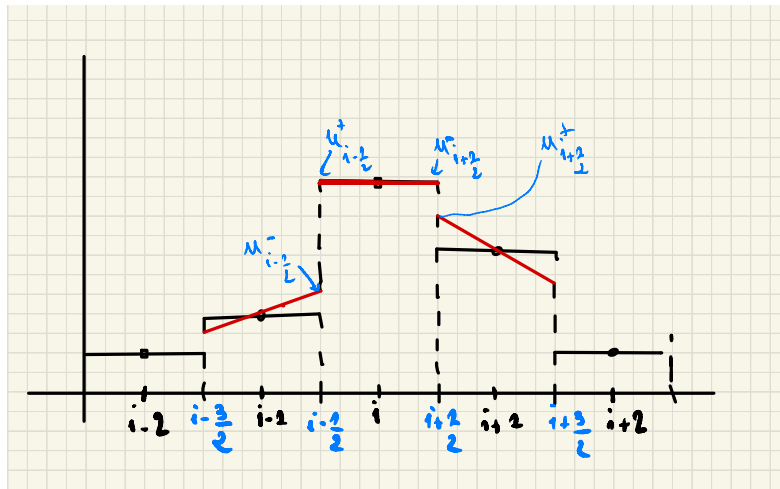
Terme consistant avec $c^e p^i - c^i p^e$.

- 1 Si la condition sous-caractéristique et la condition de CFL sont vérifiées alors on a une **inégalité d'entropie discrète**.
- 2 Si $\gamma_e = \gamma_i$ alors $(\rho_j^n, \rho_j^n u_j^n, \mathcal{E}_j^{e,n} + \mathcal{E}_j^{i,n})$ est solution du schéma HLL.
Conséquence:

$$\rho > 0, \quad p_e + p_i > 0.$$

Obtention du schéma d'ordre 2

Reconstruction affine cas 1D



Pentes calculés à partir des $\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$ et $\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$

Situation 1d

Loi de conservation

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0.$$

Point de départ: Schéma d'ordre 1

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

Etape 1: Reconstruction affine:

$$\forall x \in C_j =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[, \quad U^n(x) = U_j^n + \sigma_j^n (x - x_j), \quad x_j = \frac{1}{2}(x_{j-\frac{1}{2}} + x_{j+\frac{1}{2}}).$$

Etape 2: Valeurs à l'interface

$$U_{j+\frac{1}{2}}^+ = (U^n(x_{j+\frac{1}{2}}))^+ = U_{j+1}^n - \sigma_{j+1}^n \frac{\Delta x}{2}, \quad U_{j+\frac{1}{2}}^- = (U^n(x_{j+\frac{1}{2}}))^- = U_j^n + \sigma_j^n \frac{\Delta x}{2}.$$

Reconstruction affine cas 1D

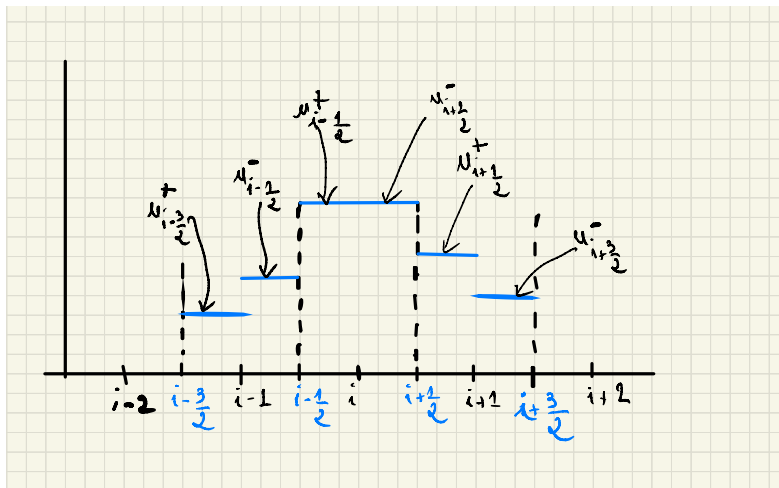
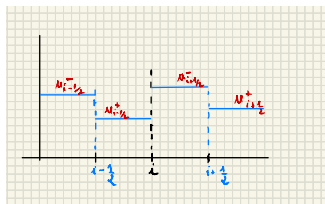


Schéma final



$$U_i^{n+1,-} = U_{i-\frac{1}{2}}^+ - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^+, U_{i+\frac{1}{2}}^-) - \mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^-, U_{i-\frac{1}{2}}^+) \right)$$

$$U_i^{n+1,+} = U_{i+\frac{1}{2}}^- - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(U_{i+\frac{1}{2}}^-, U_{i+\frac{1}{2}}^+) - \mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^+, U_{i+\frac{1}{2}}^-) \right).$$

Schéma final

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_j^{n+1,-} + U_j^{n+1,+}) = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}(U_{i+\frac{1}{2}}^-, U_{i+\frac{1}{2}}^+) - \mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^-, U_{i-\frac{1}{2}}^+) \right)$$

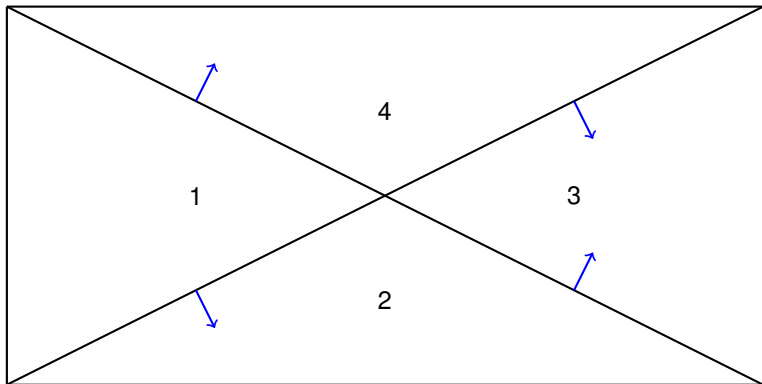
En pratique: on n'a pas besoin des flux aux milieux de mailles.

Ces idées se généralisent en 2D en divisant chaque maille en triangles.

[Perthame, Shu 1996], [Bouchut 2004]: les propriétés de positivité et, partiellement, d'entropie, sont conservés.

Procédures de limitation: [Perthame, Qiu 1994], [Berthon 2006], [Calgaro, Creusé, Goudon, Penel 2013]

Maille C_j découpée en 4 quadrants



Mise en place du schéma

$(\mathcal{U}_j^n)_j$ solution approchée à t^n . \mathcal{U}^n reconstruite par des pentes $\sigma_j^n = (\sigma_{1,j}^n, \sigma_{2,j}^n)$, $j \in \mathbb{Z}^2$:

$$\forall x \in C_j, \quad \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_j^n + (x - x_j) \cdot \sigma_j^n.$$

4 états constants

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(1)} &= \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta x_1}{2} \sigma_{1,j}^n, & \mathcal{U}_j^{(2)} &= \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{2,j}^n, \\ \mathcal{U}_j^{(3)} &= \mathcal{U}_j^n + \frac{\Delta x_1}{2} \sigma_{1,j}^n, & \mathcal{U}_j^{(4)} &= \mathcal{U}_j^n + \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{2,j}^n. \end{aligned}$$

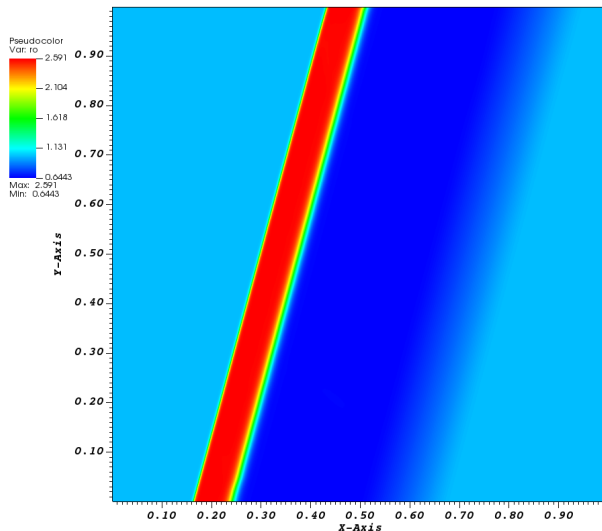
On applique le schéma d'ordre 1 sur chaque triangle. Tout est **explicitable** (upwind).

DIFFERENCE PRATIQUE AVEC LE CAS CONSERVATIF : il faut faire tous ces calculs, pas de simplification.

Résultats numériques

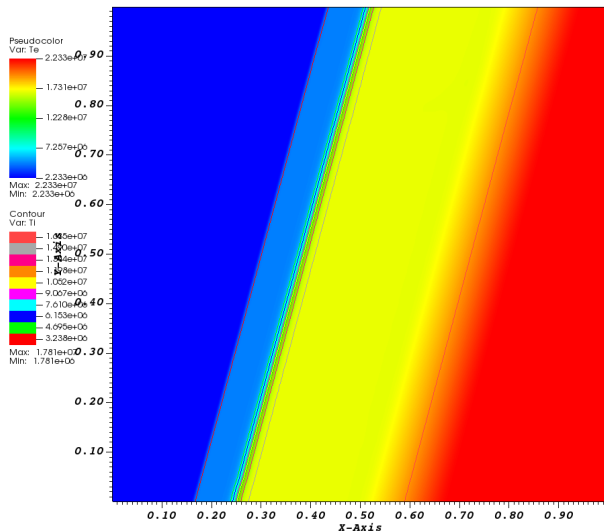
Cas test oblique: densité totale

Cas test de Sod. $v^{ei} = 4 \times 10^9$. Grille en espace 800×800



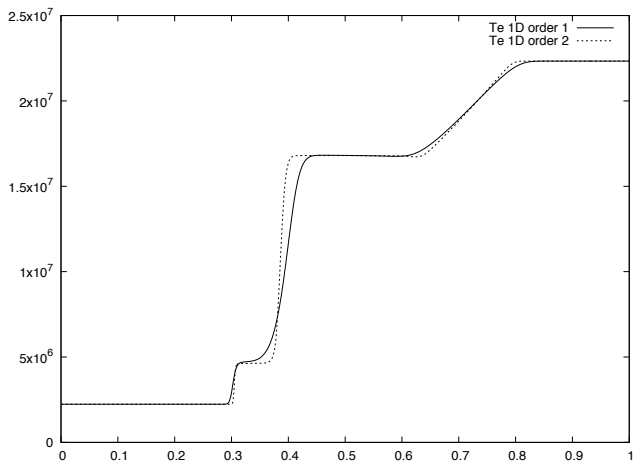
Cas test oblique

$\nu^{ei} = 4 \times 10^9$, 800 by 800 points: temperatures



Résultats 1D

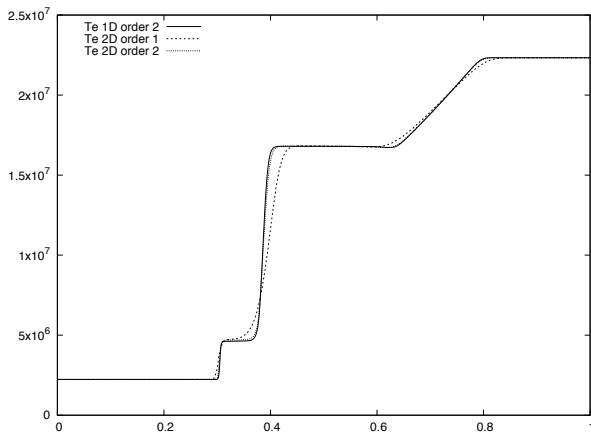
Cas test de Sod avec $\nu^{ei} = 4 \times 10^9$, 800 par 800 points. Résultats 1D



Comparaison 1D/2D

Cas test de sod avec $v^{ei} = 4 \times 10^9$, 800 par 800 points.

Comparaison 1D / 2D. Résultats le long de la direction de propagation



Domaine $[0, 1] \times [0, 1]$, partitionnés en 4 quadrants de tailles identiques

$$\rho(x_1, x_2, 0) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5,$$

$$\rho(x_1, x_2, 0) = 0.125 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5,$$

$$\rho(x_1, x_2, 0) = 0.125 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5,$$

$$\rho(x_1, x_2, 0) = 1 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5,$$

Températures électronique and ioniques:

$$T^e(x_1, x_2, 0) = 293 \text{ K}, T^i(x_1, x_2, 0) = 273 \text{ K}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5,$$

$$T^e(x_1, x_2, 0) = 220 \text{ K}, T^i(x_1, x_2, 0) = 200 \text{ K}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5,$$

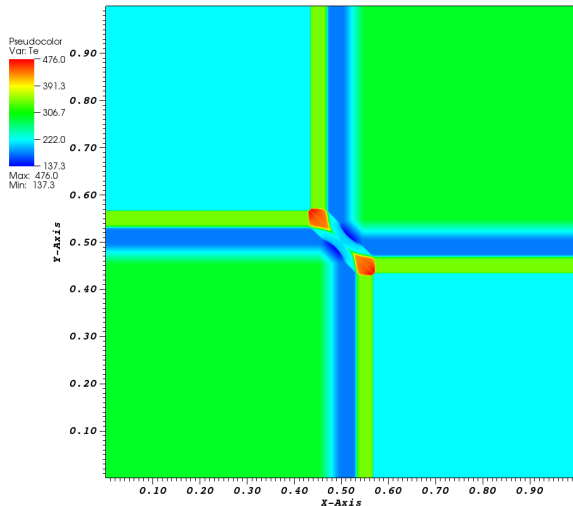
$$T^e(x_1, x_2, 0) = 220 \text{ K}, T^i(x_1, x_2, 0) = 200 \text{ K}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5,$$

$$T^e(x_1, x_2, 0) = 293 \text{ K}, T^i(x_1, x_2, 0) = 273 \text{ K}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5,$$

Température électronique

Température électronique pour un pb de Riemann à 4 interfaces

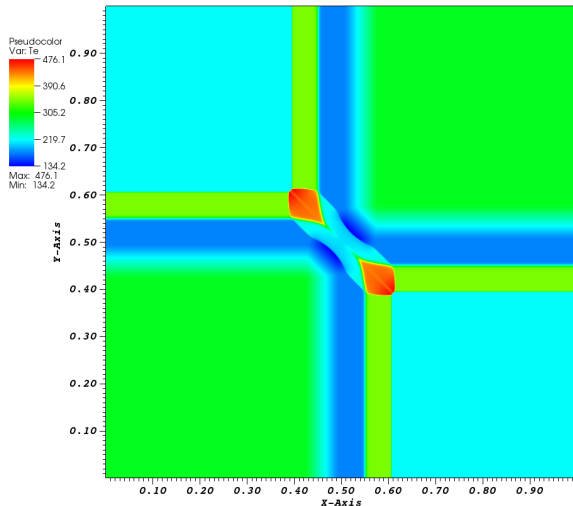
$\nu^{ei} = 100 \text{ s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



Température électronique

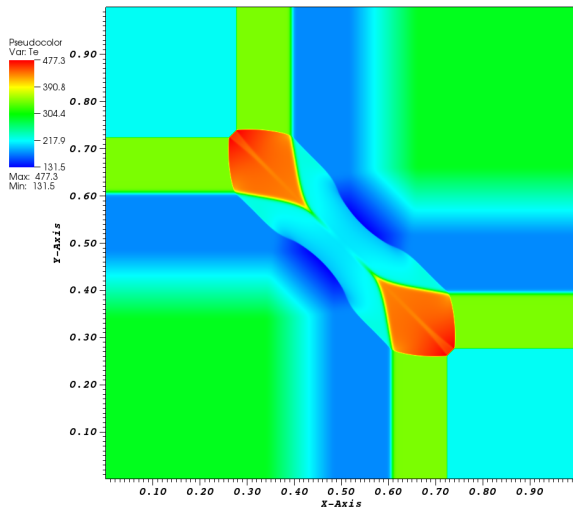
Température électronique pour un pb de Riemann à 4 interfaces

$\nu^{ei} = 100 \text{ s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



Température électronique

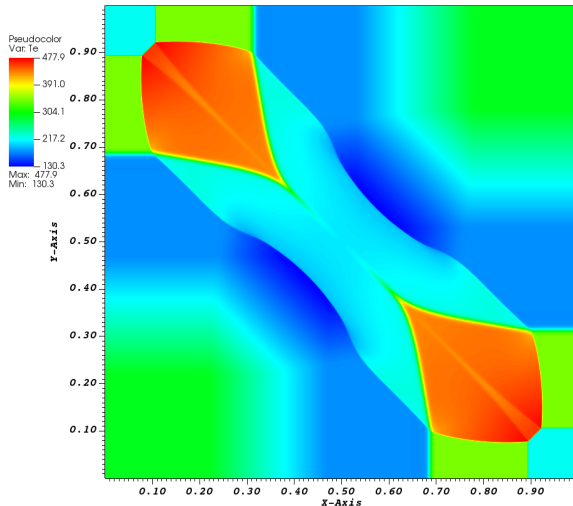
Température électronique s pour un pb de Riemann à 4 interfaces
 $v^{ei} = 100 \text{ s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



Température électronique

Température électronique pour un pb de Riemann à 4 interfaces

$\nu^{ei} = 100 \text{ s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



Comparaison 1D/2D

Températures électronique et ionique à $t = 0.0001$ s pour les 4 interfaces
 $\nu^{ei} = 100 \text{ s}^{-1}$, avec une grille de 2000 par 2000 points

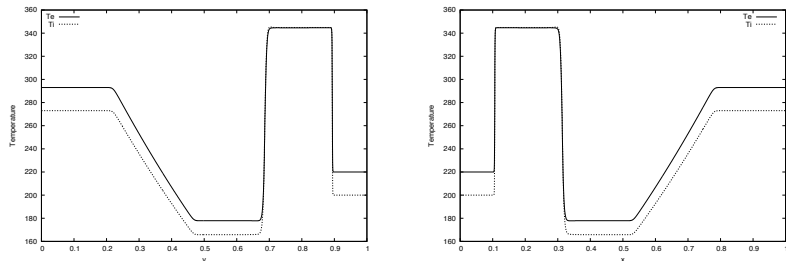


Figure: Résultats le long de l'axe $x_1 = 0.05$ (gauche) and le long de l'axe $x_2 = 0.95$ (droite).

Conditions initiales pour un problème de Riemann: $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, $u = 0 \text{ m.s}^{-1}$
les températures sont données par:

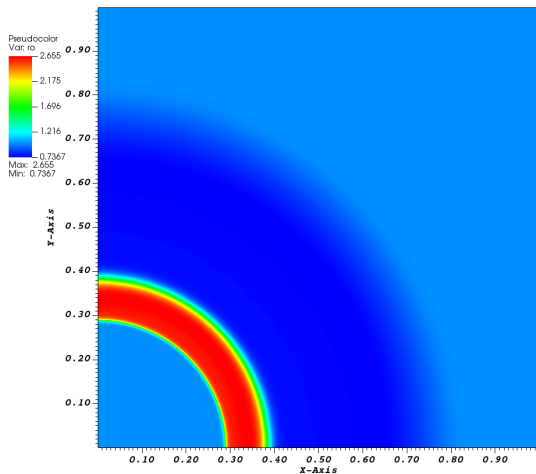
$$T^e(x_1, x_2, 0) = 2,3 \times 10^6 K, \quad T^i(x_1, x_2, 0) = 1.7406 \times 10^6 K \quad \text{if } (x_1)^2 + (x_2)^2 < \frac{1}{4},$$
$$T^e(x_1, x_2, 0) = 2,3 \times 10^7 K, \quad T^i(x_1, x_2, 0) = 1.7406 \times 10^7 K \quad \text{sinon}$$

Temps final de simulation: $t = 4.0901 \times 10^{-7} \text{ s}$.

Fréquence de relaxation ν^{ei} choisie de façon réaliste par le formulaire du NRL.

Densité totale

Densité totale au temps $t = 4.0901 \times 10^{-7}$ s pour une grille 500×500
 γ^{ei} donné par le formulaire du NRL



Comparaison avec un calcul 1d

Densité totale et vitesse le long de la première bissectrice

$t = 4.0901 \times 10^{-7}$ s avec ν^{ei} par le formulaire du NRL avec une grille 500 x 500

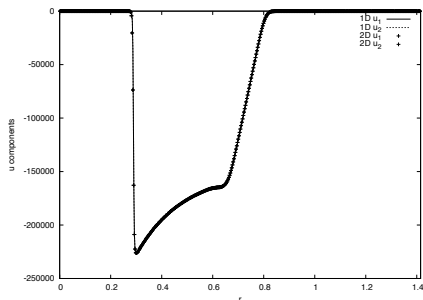
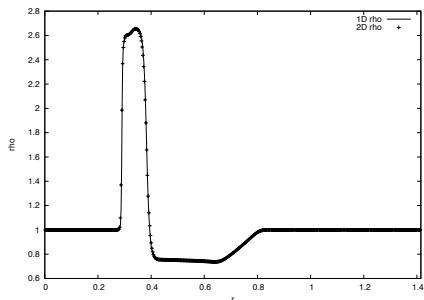


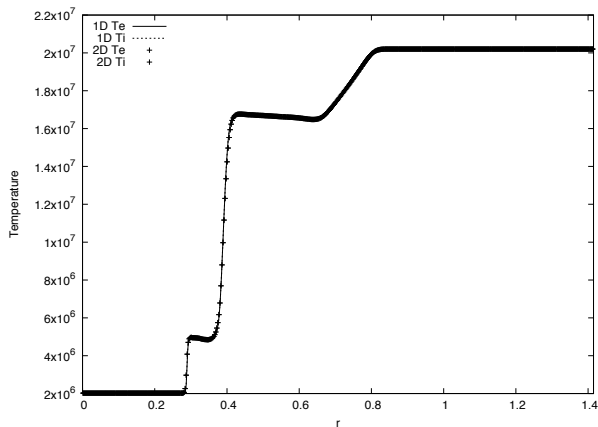
Figure: Densité totale (gauche) et vitesse (droite)

Comparaison avec un calcul 1d

Comparaison avec un calcul 1D en coordonnées polaires

Températures électroniques and ioniques au temps $t = 4.0901 \times 10^{-7}$ s

ν^{ei} donné par le formulaire du NRL pour une grille 500 x 500

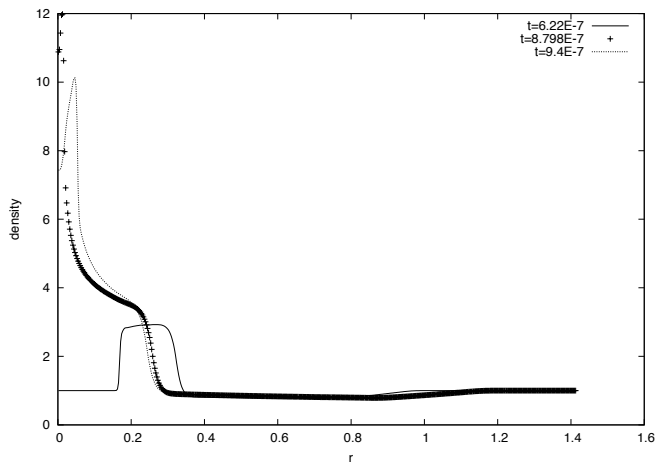


Comparaison avec un calcul 1d: densité

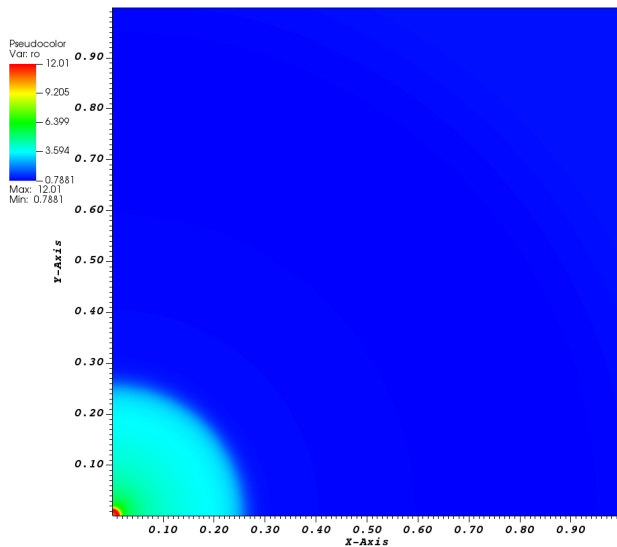
ν^{ei} donné par le formulaire du NRL pour une grille 500×500

Densité le long de la 1ère bissectrice à 3 temps différents

Pic observé à $t = 8.798 \times 10^{-7}$ sec.



Isovaleurs de la densité lors du pic



Conclusions

- Développement d'un schéma BGK discret 2D sur le modèle bitempérature
- Passage à l'ordre 2

Travaux en cours et perspectives

- En cours [D. A-D., S. Brull et A. Bouharguane](#) : méthodes DG.
- Thèse en cours de [Kevin Guillon](#) : champs magnétiques. Un premier travail: [Brull, Dubroca, Lhébrard 2021](#)
- Essais avec d'autres choix de maxwelliennes (non entropiques mais plus précis)

Merci pour votre attention