

TD3

Exercice 1. Soit le processus AR(1) défini, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \mu + \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où (ε_t) est un bruit blanc de variance σ^2 , avec $\mu \neq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Simuler une trajectoire de ce processus de taille $n = 100$ pour $\mu = 1$, $\sigma = 0.5$ et pour les trois cas suivants $\theta = 0.95$, $\theta = 0.45$, $\theta = 1.05$.
2. Pour chaque cas (valeurs différentes de θ) représenter graphiquement la trajectoire simulée. Dans quels cas le processus est-il stationnaire ?
3. Tracer la fonction d'auto-corrélation empirique à l'aide de la fonction `acf` de **R**. Celle-ci est-elle en cohérence avec la fonction d'auto-corrélation $\rho(h)$ de X ?
4. Soit $10 \leq j \leq n$. Pour $\theta = 0.95$, puis $\theta = 0.45$, déterminer les estimateurs des moindres carrés de θ , σ^2 et μ à partir de la trajectoire X_1, \dots, X_j . Comparer les estimations avec les vraies valeurs des paramètres en fonction de la valeur de j (longueur de la trajectoire utilisée pour l'estimation).
5. Soit $10 \leq j \leq n$. Proposer un estimateur \tilde{X}_{j+1} de la prévision de X_{j+1} à partir de l'observation de la trajectoire X_1, \dots, X_j . Superposer la vraie trajectoire et sa prévision en fonction de j . Que constatez-vous selon que $\theta = 0.95$ ou $\theta = 0.45$?
6. Reprendre l'ensemble des questions précédentes avec une taille d'échantillon $n = 1000$.

Exercice 2. Sur le site web Yahoo! Finance <https://fr.finance.yahoo.com/>, il est possible de télécharger l'évolution journalière, sur plusieurs années, de nombreux produits financiers. Par exemple, on peut obtenir le cours journalier de l'action de l'entreprise British Petroleum (BP) sur le site <https://fr.finance.yahoo.com/q?s=BP>. On peut également télécharger et visualiser ces données (chaque jour à l'ouverture des marchés) dans **R** à partir des commandes suivantes :

```
stock_BP = read.csv("http://ichart.finance.yahoo.com/table.csv?s=BP")
```

```
n = 2000
```

```
X = stock_BP$Open[1:n]
```

```
dev.new()
```

```
plot(X,type="l",col="red")
```

1. Représenter graphiquement les couples de points (X_{t-1}, X_t) pour $2 \leq t \leq n$. Que constatez-vous ?
2. Proposer un modèle de séries chronologiques pour modéliser ces données.
3. Estimer les paramètres du modèle et proposer une méthode de prévision du cours de cette action du jour pour le lendemain. Visualiser la qualité de la prévision.