Mathématiques pour la biologie - Corrigé

Exercice 1
1)
On a avec la règle de Cramer :

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{20}{10} = 2$$

et

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{0}{10} = 0$$

2)
Calcul des valeurs propres

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda - 2\lambda + 10 = P(\lambda)$$

On calcule les racines de P. On a $\Delta = -36$ et donc deux racines complexes :

$$\lambda_1 = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i.$$

Calcul des vecteurs propres
Pour $\lambda = \lambda_1 = 1 - 3i$ on a

$$(A - \lambda_1 I)\, X = \begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3ix_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 3ix_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(A - \lambda_1 I)\, X = 0$ si

$$\begin{cases} 3ix_1 - 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3ix_2 &= 0 \end{cases}$$

et donc [1] si

$$3ix_1 = 3x_2 \Rightarrow ix_1 = x_2.$$

1. en multipliant la deuxième ligne par i on retrouve la première équation

On peut donc prendre le vecteur

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = \lambda_2 = 1 + 3i$ on a

$$(A - \lambda_2 I)\, X = \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3ix_1 - 3x_2 \\ 3x_1 - 3ix_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(A - \lambda_2 I)\, X = 0$ si

$$\begin{cases} -3ix_1 - 3x_2 & = 0 \\ 3x_1 - 3ix_2 & = 0 \end{cases}$$

et donc [2] si

$$3ix_1 = -3x_2 \Rightarrow ix_1 = -x_2.$$

On peut donc prendre le vecteur

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On utilise la méthode du pivot de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} . \\ \text{L1+2L2} \\ \text{L3-L1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} . \\ . \\ \text{L3+L2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \text{L1-2L3} \\ \text{L2-2L3} \\ . \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{L1-3L2} \\ . \\ . \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

et donc

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

En notant

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. en multipliant la deuxième ligne par i on retrouve la première équation

on peut réécrire le système comme

$$BX = r$$

avec B la matrice de l'exercice précédent. On a donc

$$X = B^{-1}r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -19 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4
1)
Calcul des valeurs propres

$$\det(C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda - 2\lambda - 3 = P(\lambda)$$

On calcule les racines de P. On a $\Delta = 16$ et donc deux racines complexes :

$$\lambda_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Calcul des vecteurs propres
Pour $\lambda = \lambda_1 = -1$ on a

$$(C - \lambda_1 I)\, X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(C - \lambda_1 I)\, X = 0$ si

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 & = 0 \end{cases}$$

et donc si

$$-2x_1 = x_2.$$

On peut donc associer le vecteur

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = \lambda_2 = 3$ on a

$$(C - \lambda_2 I)\, X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(C - \lambda_2 I)\, X = 0$ si

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 & = 0 \end{cases}$$

et donc si

$$2x_1 = x_2.$$

On peut donc associer le vecteur

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2)

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3)

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

$$C^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$$