Quelques contributions à l'étude d'inégalités fonctionnelles pour des opérateurs sous-elliptiques, elliptiques et discrets

Michel Bonnefont

Institut de Mathématiques de Bordeaux

29 novembre 2019
soutenance HDR

Les trois cadres différents

- Laplaciens sous elliptiques $L = \Delta_h$,
  typiquement $L = X^2 + Y^2$ en dimension 3, ou $L = \Delta_h - X_0$.

Les trois cadres différents

- Laplaciens sous elliptiques $L = \Delta_h$,
  typiquement $L = X^2 + Y^2$ en dimension 3, ou $L = \Delta_h - X_0$.
- Opérateurs de diffusion elliptiques: typiquement
  $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$ sur $\mathbb{R}^n$

Les trois cadres différents

- Laplaciens sous elliptiques $L = \Delta_h$,
  typiquement $L = X^2 + Y^2$ en dimension 3, ou $L = \Delta_h - X_0$.
- Opérateurs de diffusion elliptiques: typiquement
  $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$ sur $\mathbb{R}^n$
- Laplaciens discrets :
  $L = \Delta$ avec Δ le Laplacien sur un graphe infini

Le cadre général

Le cadre général

On considère un **opérateur de diffusion** sur une variété: dans une carte, il s'écrit

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i$$

avec $(a_{i,j})_{i,j}$ une matrice symétrique ≥ 0. Si $(a_{i,j}) > 0$, on dit que L est **elliptique**.

Le cadre général

On considère un **opérateur de diffusion** sur une variété: dans une carte, il s'écrit

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i$$

avec $(a_{i,j})_{i,j}$ une matrice symétrique ≥ 0. Si $(a_{i,j}) > 0$, on dit que L est **elliptique**.

On considèrera souvent des opérateurs symétriques sur une variété complète (H1): L est alors essentiellement auto-adjoint. Par le théorème spectral: $P_t := e^{tL}$.

Le cadre général

On considère un **opérateur de diffusion** sur une variété: dans une carte, il s'écrit

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i$$

avec $(a_{i,j})_{i,j}$ une matrice symétrique ≥ 0. Si $(a_{i,j}) > 0$, on dit que L est **elliptique**.

On considèrera souvent des opérateurs symétriques sur une variété complète (H1): L est alors essentiellement auto-adjoint. Par le théorème spectral: $P_t := e^{tL}$.

Objectifs: Obtenir des estimées géométriques et globales pour ce semi-groupe P_t.

Le cadre Riemannien

Le critère de Bakry-Emery : Γ and Γ_2.

Le cadre Riemannien

Le critère de Bakry-Emery : Γ and Γ_2. Pour un opérateur de diffusion L,

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(fg) - fLg - gLf\right)$$

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf)\right).$$

Le cadre Riemannien

Le critère de Bakry-Emery : Γ and Γ_2. Pour un opérateur de diffusion L,

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(fg) - fLg - gLf\right)$$

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf)\right).$$

- **Lien avec la géométrie**:

$$\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2.$$

Le cadre Riemannien

Le critère de Bakry-Emery : Γ and Γ_2. Pour un opérateur de diffusion L,

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(fg) - fLg - gLf\right)$$

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}\left(L(\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(g,Lf)\right).$$

- **Lien avec la géométrie**:

$$\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2.$$

- **Formule de Böchner** Si $L = \Delta_g$,

$$\Gamma_2(f,f) = \|Hessf\|_2^2 + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

Le cadre Riemannien

Le critère de courbure-dimension de Bakry-Emery Pour $\rho \in \mathbb{R}$ et $n > 0$, on dit que le critère de courbure $CD(\rho, n)$ est vérifié si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$:

$$\Gamma_2(f, f) \geq \rho \Gamma(f, f) + \frac{1}{n}(Lf)^2.$$

Le cadre Riemannien

Le critère de courbure-dimension de Bakry-Emery Pour $\rho \in \mathbb{R}$ et $n > 0$, on dit que le critère de courbure $CD(\rho, n)$ est vérifié si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$:

$$\Gamma_2(f, f) \geq \rho \Gamma(f, f) + \frac{1}{n}(Lf)^2.$$

- **formule de Böchner** Si $L = \Delta_g$, dim $M = n$ Alors si $Ric \geq \rho Id$, L vérifie $CD(\rho, n)$.

Le cadre Riemannien

Le critère de courbure-dimension de Bakry-Emery Pour $\rho \in \mathbb{R}$ et $n > 0$, on dit que le critère de courbure $CD(\rho, n)$ est vérifié si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$:

$$\Gamma_2(f, f) \geq \rho \Gamma(f, f) + \frac{1}{n}(Lf)^2.$$

- **formule de Böchner** Si $L = \Delta_g$, dim $M = n$ Alors si $Ric \geq \rho Id$, L vérifie $CD(\rho, n)$.
- Si $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$ sur $\mathbb{R}^n$,

  L vérifie $CD(\rho, \infty)$ si et seulement si $HessV \geq \rho$.

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*
2. $\forall f,\ \forall t \geq 0,\ \forall x,\ |\nabla P_t(f)(x)|^2 \leq e^{-2\rho t} P_t(|\nabla f|^2)(x).$
3. $\forall f,\ \forall t \geq 0,\ \forall x,\ |\nabla P_t(f)(x)| \leq e^{-\rho t} P_t(|\nabla f|)(x).$

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*
2. $\forall f,\ \forall t \geq 0,\ \forall x,\ |\nabla P_t(f)(x)|^2 \leq e^{-2\rho t} P_t(|\nabla f|^2)(x)$.
3. $\forall f,\ \forall t \geq 0,\ \forall x,\ |\nabla P_t(f)(x)| \leq e^{-\rho t} P_t(|\nabla f|)(x)$.
4. *L'inégalité de Poincaré est satisfaite: $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$:*

$$P_t(f^2) - P_t(f)^2 \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{\rho} P_t(\Gamma(f))$$

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*
2. $\forall f,\ \forall t \geq 0,\ \forall x,\ |\nabla P_t(f)(x)|^2 \leq e^{-2\rho t} P_t(|\nabla f|^2)(x)$.
3. $\forall f,\ \forall t \geq 0,\ \forall x,\ |\nabla P_t(f)(x)| \leq e^{-\rho t} P_t(|\nabla f|)(x)$.
4. *L'inégalité de Poincaré est satisfaite: $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$:*
$$P_t(f^2) - P_t(f)^2 \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{\rho} P_t(\Gamma(f))$$
5. *L'inégalité de log-Sobolev est satisfaite: $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$, $f > 0$,*
$$P_t(f \ln(f)) - P_t(f) \ln(P_t(f)) \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{2\rho} P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right)$$

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit L un opérateur de diffusion sur une variété complète vérifiant le critère $CD(\rho, \infty)$ *avec* $\rho > 0$. *Alors,*

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit L un opérateur de diffusion sur une variété complète vérifiant le critère $CD(\rho,\infty)$ avec $\rho > 0$. Alors,

1. *L'inégalité de Poincaré est satisfaite: $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$:*

$$Var_\mu(f) \leq \frac{1}{\rho}\int \Gamma(f)d\mu. \tag{1.1}$$

2. *L'inégalité de Log-Sobolev est satisfaite: $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$, $f > 0$,*

$$Ent_\mu(f) \leq \frac{1}{2\rho}\int \left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right) d\mu. \tag{1.2}$$

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*

Théorème (Bakry-Emery '84)

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. *Le critère $CD(\rho, \infty)$ est satisfait.*
2. *L'inégalité de Poincaré inverse est satisfaite:, $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$,*

$$P_t(f^2) - P_t(f)^2 \geq \frac{e^{2\rho t} - 1}{\rho} \Gamma(P_t f)$$

3. *L'inégalité de log Sobolev inverse est satisfaite: $\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$, $f > 0$,:*

$$P_t(f \ln(f)) - P_t(f) \ln(P_t(f)) \geq \frac{e^{2\rho t} - 1}{2\rho} \frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f}$$

Le groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg

$\mathbb{R}^3$ avec la loi

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx') \right).$$

$\rightarrow$ lien avec l'aire balayée.

Le groupe de Heisenberg

$\mathbb{R}^3$ avec la loi

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = \left(x+x', y+y', z+z'+\frac{1}{2}(xy'-yx')\right).$$

$\rightarrow$ lien avec l'aire balayée. Champs de vecteurs invariants à gauche:

$$X(f)(x,y,z) = (\partial_x - \frac{y}{2}\partial_z)f(x,y,z)$$

$$Y(f)(x,y,z) = (\partial_y + \frac{x}{2}\partial_z)f(x,y,z)$$

$$Z(f)(x,y,z) = \partial_z f(x,y,z).$$

Sous Laplacien canonique

$$\Delta_{\mathbb{H}} = X^2 + Y^2.$$

$$[X,Y] = Z,\ [X,Z] = [Y,Z] = 0;$$

Autres espaces modèles: Même construction sur S_2 $(SU(2,\mathbb{R}))$ et H_2 $(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})})$: $L = X^2 + Y^2$.

Autres espaces modèles: Même construction sur S_2 $(SU(2,\mathbb{R}))$ et H_2 $(\widetilde{SL(2,\mathbb{R})})$: $L = X^2 + Y^2$.

$$[X, Y] = Z,\ [X, Z] = -\rho Y,\ [Y, Z] = \rho X;$$

avec $\rho = 1$ pour $SU(2)$ et $\rho = -1$ pour $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$.

Autres espaces modèles: Même construction sur S_2 ($SU(2,\mathbb{R})$) et H_2 ($\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$): $L = X^2 + Y^2$.

$$[X,Y] = Z,\ [X,Z] = -\rho Y,\ [Y,Z] = \rho X;$$

avec $\rho = 1$ pour $SU(2)$ et $\rho = -1$ pour $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$.

$\rightarrow$ On peut montrer que le critère $CD(\rho,\infty)$ n'est pas satisfait.

Differentes approches pour obtenir Poincaré or log-Sobolev

Differentes approches pour obtenir Poincaré or log-Sobolev

1. Inégalités de Driver-Melcher and H.Q. Li (sous commutation entre ∇_h et P_t on $\mathbb{H}$).

Differentes approches pour obtenir Poincaré or log-Sobolev

1. Inégalités de Driver-Melcher and H.Q. Li (sous commutation entre ∇_h et P_t on $\mathbb{H}$).
2. Un critère de courbure dimension généralisé [BBBQ09, BB12]

Differentes approches pour obtenir Poincaré or log-Sobolev

1. Inégalités de Driver-Melcher and H.Q. Li (sous commutation entre ∇_h et P_t on $\mathbb{H}$).
2. Un critère de courbure dimension généralisé [BBBQ09, BB12]
3. Approche de F.Y. Wang: basé sur l'intégrabilité de $e^{\alpha d_{cc}^2}$ et le critère de courbure-dimension généralisé [BB12]

Differentes approches pour obtenir Poincaré or log-Sobolev

1. Inégalités de Driver-Melcher and H.Q. Li (sous commutation entre ∇_h et P_t on $\mathbb{H}$).
2. Un critère de courbure dimension généralisé [BBBQ09, BB12]
3. Approche de F.Y. Wang: basé sur l'intégrabilité de $e^{\alpha d_{cc}^2}$ et le critère de courbure-dimension généralisé [BB12]
4. Approche de Gross par tensorisation et le théorème central limite [BCH16].

Differentes approches pour obtenir Poincaré or log-Sobolev

1. Inégalités de Driver-Melcher and H.Q. Li (sous commutation entre ∇_h et P_t on $\mathbb{H}$).
2. Un critère de courbure dimension généralisé [BBBQ09, BB12]
3. Approche de F.Y. Wang: basé sur l'intégrabilité de $e^{\alpha d_{cc}^2}$ et le critère de courbure-dimension généralisé [BB12]
4. Approche de Gross par tensorisation et le théorème central limite [BCH16].
5. Approche par couplage stochastique et lien avec des contractions en distance de Wasserstein [BJ18]

Differentes approches pour obtenir Poincaré or log-Sobolev

1. Inégalités de Driver-Melcher and H.Q. Li (sous commutation entre ∇_h et P_t on $\mathbb{H}$).
2. Un critère de courbure dimension généralisé [BBBQ09, BB12]
3. Approche de F.Y. Wang: basé sur l'intégrabilité de $e^{\alpha d_{cc}^2}$ et le critère de courbure-dimension généralisé [BB12]
4. Approche de Gross par tensorisation et le théorème central limite [BCH16].
5. Approche par couplage stochastique et lien avec des contractions en distance de Wasserstein [BJ18]
6. Approche avec des fonctions de Lyapunov pour $\frac{e^{-d_{cc}^2(0,x)}}{Z}dx$ (Hebish-Zegarlinski).

Théorème (Driver-Melcher '05, H.Q.Li '06, [BBBC08])

Inégalité de Driver-Melcher *: $\forall f$*

$$|\nabla_h(P_t f)|^2 \leq C_2 P_t(|\nabla_h f|^2) \tag{2.3}$$

avec C_2 une constante $C_2 \geq 2$.

Inégalité de H.Q. Li *: $\forall f$*

$$|\nabla_h(P_t f)| \leq C_1 P_t(|\nabla_h f|). \tag{2.4}$$

avec C_1 une constante $C_1 \geq \sqrt{2}$.

Théorème (Driver-Melcher '05, H.Q.Li '06, [BBBC08])

Inégalité de Driver-Melcher *:* $\forall f$

$$|\nabla_h(P_t f)|^2 \leq C_2 P_t(|\nabla_h f|^2) \tag{2.3}$$

avec C_2 une constante $C_2 \geq 2$.

Inégalité de H.Q. Li *:* $\forall f$

$$|\nabla_h(P_t f)| \leq C_1 P_t(|\nabla_h f|). \tag{2.4}$$

avec C_1 une constante $C_1 \geq \sqrt{2}$.

Driver-Melcher implique l'inégalité de **Poincaré** pour P_t.
H.Q. Li implique l'inégalité de **Log-Sobolev** pour P_t.

Ingrédients pour DM: structure de groupe, champs de vecteurs invariants à droite et estimées de $\Gamma(\ln p_t)$.

Ingrédients pour DM: structure de groupe, champs de vecteurs invariants à droite et estimées de $\Gamma(\ln p_t)$.

Points clés pour H.Q. Li: des découpages, connaissances des géodésiques ou du noyau de la chaleur pour z complexe et les estimées optimales:

$$p_t(e,g) \simeq \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^3 r\, d_{cc}(e,g)}} \exp\Big(- \frac{d_{cc}^2(e,g)}{4t} \Big) \qquad (2.5)$$

$$\Gamma_2(f,f) =(X^2 f)^2 + (Y^2 f)^2 + \frac{1}{2}((XY+YX)f)^2 + \frac{1}{2}(Zf)^2$$
$$+ \rho\Gamma(f,f) - 2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf).$$

$$\Gamma_2(f,f) = (X^2 f)^2 + (Y^2 f)^2 + \frac{1}{2}((XY+YX)f)^2 + \frac{1}{2}(Zf)^2 \\ + \rho\Gamma(f,f) - 2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf).$$

Du fait des termes $-2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf)$, $CD(\rho,\infty)$ **n'est pas vérifié**.

$$\Gamma_2(f,f) = (X^2f)^2 + (Y^2f)^2 + \frac{1}{2}((XY+YX)f)^2 + \frac{1}{2}(Zf)^2 + \rho\Gamma(f,f) - 2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf).$$

Du fait des termes $-2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf)$, $CD(\rho,\infty)$ **n'est pas vérifié**. On introduit $\Gamma^Z(f,f) = (Zf)^2$. On pose alors

$$\Gamma_2^Z(f,g) := \frac{1}{2}\Big(L(\Gamma^Z(f,g) - \Gamma^Z(f,Lg) - \Gamma^Z(g,Lf)\Big).$$

Ici: $\Gamma_2^Z(f) = \Gamma(Zf, ZF) = (XZ)^2 + (YZf)^2$.

$$\Gamma_2(f,f) = (X^2f)^2 + (Y^2f)^2 + \frac{1}{2}((XY+YX)f)^2 + \frac{1}{2}(Zf)^2 + \rho\Gamma(f,f) - 2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf).$$

Du fait des termes $-2(Xf)(YZf) + 2(Yf)(XZf)$, $CD(\rho,\infty)$ **n'est pas vérifié**. On introduit $\Gamma^Z(f,f) = (Zf)^2$. On pose alors

$$\Gamma_2^Z(f,g) := \frac{1}{2}\Big(L(\Gamma^Z(f,g) - \Gamma^Z(f,Lg) - \Gamma^Z(g,Lf)\Big).$$

Ici: $\Gamma_2^Z(f) = \Gamma(Zf,ZF) = (XZ)^2 + (YZf)^2$.

Définition (Critère de courbure-dimension généralisé)

On dit que L satisfait $CD(\rho_1,\rho_2,\kappa,d)$ avec $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\rho_2 > 0$, $\kappa \geq 0$ et $0 < d \leq \infty$ si pour tout f et tout $\nu > 0$,

$$(H2)\quad \Gamma_2(f) + \nu\Gamma_2^Z(f) \geq \frac{1}{d}(Lf)^2 + \left(\rho_1 - \frac{\kappa}{\nu}\right)\Gamma(f) + \rho_2\Gamma^Z(f)$$

Ici: $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \frac{1}{2}, \kappa = 1, d = 2.$

Ici: $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \frac{1}{2}, \kappa = 1, d = 2.$

Une chose importante:

- (H3) $$\Gamma(f, \Gamma^Z(f)) = \Gamma^Z(f, \Gamma(f)).$$

Ici: $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \frac{1}{2}, \kappa = 1, d = 2$.

Une chose importante:

- (H3) $\Gamma(f, \Gamma^Z(f)) = \Gamma^Z(f, \Gamma(f))$.

$\rightarrow$ **cadre géométrique** étudié par Baudoin et Garofalo (feuilletage Riemannien avec des fibres totalements géodésiques) (Voir Elworthy, Thalmaier et Grong).

Comment utiliser le critère:

Lemme

Soit $f > 0$ *et posons* $0 \leq s \leq t$,

$$\Phi_1(s) = (P_{t-s}f)\Gamma(\ln P_{t-s}f), \tag{2.6}$$

$$\Phi_2(s) = (P_{t-s}f)\Gamma^Z(\ln P_{t-s}f). \tag{2.7}$$

Comment utiliser le critère:

Lemme

Soit $f > 0$ et posons $0 \leq s \leq t$,

$$\Phi_1(s) = (P_{t-s}f)\Gamma(\ln P_{t-s}f), \tag{2.6}$$

$$\Phi_2(s) = (P_{t-s}f)\Gamma^Z(\ln P_{t-s}f). \tag{2.7}$$

Alors, sous (H3)

$$\left(\frac{d}{ds} + L\right)\Phi_1(s) = 2(P_{t-s}f)\Gamma_2(\ln P_{t-s}f)$$

$$\left(\frac{d}{ds} + L\right)\Phi_2(s) = 2(P_{t-s}f)\Gamma_2^Z(\ln P_{t-s}f).$$

(H4) Le semi groupe est stochastiquement complet ($P_t 1 = 1$) et le gradient du semi-groupe est borné dans L^∞.

(H4) Le semi groupe est stochastiquement complet ($P_t 1 = 1$) et le gradient du semi-groupe est borné dans L^∞.

Théorème ([BBBQ09],Baudoin-Garofalo'17)

Sous les hypothèses précédentes et sous $CD(\rho_1, \rho_2, \kappa, d)$*. Soient* $a, b \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}_+)$ *et* $\gamma \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}_+)$*. Alors pour toute fonction* $f \geq \varepsilon > 0$*,*

$$\begin{aligned} & a(T)P_T(f\Gamma(\ln f)) + b(T)P_T(f\Gamma^Z(\ln f)) \\ & -a(0)(P_T f)\Gamma(\ln P_t f)) - b(0)(P_T f)\Gamma(\ln P_t f) \\ & \geq \int_0^T \left(a' + 2\rho_1 a - 2\kappa\frac{a^2}{b} - \frac{4a\gamma}{d}\right)\Phi_1(s)ds \\ & \qquad + \int_0^T (b' + 2\rho_2 a)\,\Phi_2(s)ds \\ & + \left(\frac{4}{d}\int_0^T a\gamma ds\right) LP_T f - \left(\frac{2}{d}\int_0^T a\gamma^2 ds\right) P_T f. \end{aligned}$$

Théorème ([BB12])

Si L est symétrique et vérifie $CD(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ avec $\rho_1 > 0$.

- *La mesure μ est finie et l'inégalité de Poincaré suivante est satisfaite:*

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathcal{M}} f d\mu\right)^2 \leq \frac{\kappa + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu$$

- *L'inégalité de Log-Sobolev suivante est satisfaite:*

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 \ln f^2 d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \ln \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \\ \leq \frac{2(\kappa + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \left(\int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu + \frac{\kappa + \rho_2}{\rho_1} \int_{\mathcal{M}} \Gamma^Z(f) d\mu\right).$$

Idée de la preuve:

Idée de la preuve:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{M}} P_t f \,\Gamma(\ln P_t f) d\mu dt.$$

Proposition (Borne du grradient de log de P_t. [BG17, BB12])

Soit $f \geq \varepsilon > 0$, Pour $x \in \mathcal{M}$, et $t \geq 0$ on a:

$$\begin{aligned}
&(P_t f)\Gamma(\ln P_t f) + \frac{\kappa + \rho_2}{\rho_1}(P_t f)\Gamma^Z(\ln P_t f) \\
\leq & e^{-2\frac{\rho_1 \rho_2 t}{\kappa+\rho_2}} \left(P_t(f\Gamma(\ln f)) + \frac{\kappa+\rho_2}{\rho_1} P_t(f\Gamma^Z(\ln f)) \right)
\end{aligned}$$

Théorème (Approche de Wang, [BB12])

Soit L un opérateur de diffusion ***symétrique*** *par rapport à une mesure de* ***probabilité*** μ *et vérifiant* $CD(\rho_1, \rho_2, \kappa, \infty)$ *avec* $\rho_1 \in \mathbb{R}$. *Supposons de plus*

$$\int_{\mathcal{M}} e^{\lambda d^2(x_0,x)} d\mu(x) < +\infty,$$

pour un certain $\lambda > \frac{\rho_1^-}{2}$, *alors il existe* $\rho_0 > 0$ *tel que pour toute* $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$,

$$\int_{\mathcal{M}} f^2 \ln f^2 d\mu - \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \ln \int_{\mathcal{M}} f^2 d\mu \leq \frac{2}{\rho_0} \int_{\mathcal{M}} \Gamma(f) d\mu.$$

Proposition (Inégalité de Log-Sobolev inverse [BG17, BB12])

Soit $f \geq \varepsilon > 0$*, on a*

$$\begin{aligned} & tP_t f(x)\Gamma(\ln P_t f)(x) + \rho_2 t^2 P_t f(x)\Gamma^Z(\ln P_t f)(x) \\ & \leq \left(1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t\right)\left[P_t(f \ln f)(x) - P_t f(x) \ln P_t f(x)\right]. \end{aligned}$$

Proposition (Inégalité de Log-Sobolev inverse [BG17, BB12])

Soit $f \geq \varepsilon > 0$, *on a*

$$tP_t f(x)\Gamma(\ln P_t f)(x) + \rho_2 t^2 P_t f(x)\Gamma^Z(\ln P_t f)(x)$$
$$\leq \left(1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t\right)\left[P_t(f\ln f)(x) - P_t f(x)\ln P_t f(x)\right].$$

Proposition (Inégalité de Wang-Harnack)

Soit $\alpha > 1$ *et* $f \in L^\infty(\mathcal{M})$, $f \geq 0$, $t > 0$, $x, y \in \mathcal{M}$,

$$(P_t f)^\alpha(x) \leq P_t(f^\alpha)(y)\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(\frac{1 + \frac{2\kappa}{\rho_2} + 2\rho_1^- t}{4t}\right)d^2(x,y)\right).$$

Avec

$$\int_{\mathcal{M}} e^{\lambda d^2(x_0,x)} d\mu(x) < +\infty,$$

on obtient le semi-goupe est hyper-borné: il existe $\alpha < \beta$

$$\|P_t f\|_{L^\beta} \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{L^\alpha}.$$

Puis des arguments de Gross.

Avec

$$\int_{\mathcal{M}} e^{\lambda d^2(x_0,x)} d\mu(x) < +\infty,$$

on obtient le semi-goupe est hyper-borné: il existe $\alpha < \beta$

$$\|P_t f\|_{L^\beta} \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{L^\alpha}.$$

Puis des arguments de Gross.

- Méthodes similaires pour obtenir la convergence entropique de l'opérateur d'OU: $\Delta_h - D$ sur $\mathbb{H}$ [BBC19].

Avec

$$\int_{\mathcal{M}} e^{\lambda d^2(x_0,x)} d\mu(x) < +\infty,$$

on obtient le semi-goupe est hyper-borné: il existe $\alpha < \beta$

$$\|P_t f\|_{L^\beta} \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{L^\alpha}.$$

Puis des arguments de Gross.

- Méthodes similaires pour obtenir la convergence entropique de l'opérateur d'OU: $\Delta_h - D$ sur $\mathbb{H}$ [BBC19].
- Utilisation d'un critère sous-Riemannien pour un Laplacien Riemannien [BB15].

Théorème (Propriété du doublement de la mesure,[BBG14])

Si L vérifié le critère de courbure dimension généralisé avec $\rho_1 \geq 0$ et d ***fini****. Alors l'espace métrique mesuré $(\mathbb{M}, d, \mu)$ vérifie* ***la propriété globale de doublement de la mesure:*** *il existe une constante $C_1 = C_1(\rho_2, \kappa, d) > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{M}$ et tout $r > 0$,*

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_1 \mu(B(x, r)).$$

Mots clés:

Inégalités de type Li-Yau (Bakry-Ledoux '06)

Mots clés:

Inégalités de type Li-Yau (Bakry-Ledoux '06)
Inégalités de Harnack

Mots clés:

Inégalités de type Li-Yau (Bakry-Ledoux '06)
Inégalités de Harnack
Estimées supérieures gaussiennes du noyau de la chaleur

Mots clés:

Inégalités de type Li-Yau (Bakry-Ledoux '06)
Inégalités de Harnack
Estimées supérieures gaussiennes du noyau de la chaleur
Version dimensionnelle de Log-Sobolev inverse

Mots clés:

Inégalités de type Li-Yau (Bakry-Ledoux '06)
Inégalités de Harnack
Estimées supérieures gaussiennes du noyau de la chaleur
Version dimensionnelle de Log-Sobolev inverse
Estimées inférieures gaussiennes du noyau de la chaleur

Mots clés:

Inégalités de type Li-Yau (Bakry-Ledoux '06)
Inégalités de Harnack
Estimées supérieures gaussiennes du noyau de la chaleur
Version dimensionnelle de Log-Sobolev inverse
Estimées inférieures gaussiennes du noyau de la chaleur

- Cas courbure minoré: $\rho_1 \geq -k$: [BBGM14]

Mots clés:

Inégalités de type Li-Yau (Bakry-Ledoux ‘06)
Inégalités de Harnack
Estimées supérieures gaussiennes du noyau de la chaleur
Version dimensionnelle de Log-Sobolev inverse
Estimées inférieures gaussiennes du noyau de la chaleur

- Cas courbure minoré: $\rho_1 \geq -k$: [BBGM14]
- Comparaison des distances sous riemanniennes et riemanniennes [BB13]

Inégalité de Brascamp-Lieb

On considère une mesure de probabilité $d\mu = e^{-V}dx$ sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème (Brascamp-Lieb ('76))

Si V est strictement convexe, i.e. $HessV > 0$, alors

Inégalité de Brascamp-Lieb

On considère une mesure de probabilité $d\mu = e^{-V}dx$ sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème (Brascamp-Lieb ('76))

Si V est strictement convexe, i.e. $HessV > 0$, alors

$$Var_\mu(f) \le \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T (Hess\, V)^{-1} (\nabla f)\, d\mu. \tag{3.8}$$

Inégalité de Poincaré

Inégalité de Poincaré

Inégalité de Poincaré : PI(λ)

$$\lambda \mathrm{Var}_{\mu}(f) \leq \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu, \quad \forall f \in \mathbb{C}_c^{\infty}(\mathcal{M}).$$

Inégalité de Poincaré

Inégalité de Poincaré : PI(λ)

$$\lambda \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu, \qquad \forall f \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathcal{M}).$$

Avec $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$, on a

$$\mathbf{PI}(\lambda) \Leftrightarrow \mathrm{Spec}(-L) \subset \{0\} \cup [\lambda, \infty).$$

Inégalité de Poincaré

Inégalité de Poincaré : PI(λ)

$$\lambda \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu, \quad \forall f \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathcal{M}).$$

Avec $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$, on a

$$\mathbf{PI}(\lambda) \Leftrightarrow \mathrm{Spec}(-L) \subset \{0\} \cup [\lambda, \infty).$$

Le plus grand λ est appelé le **trou spectral** et est noté $\lambda_1(\mu)$.

Inégalité de Poincaré

Inégalité de Poincaré : PI(λ)

$$\lambda \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu, \quad \forall f \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathcal{M}).$$

Avec $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$, on a

$$\mathbf{PI}(\lambda) \Leftrightarrow \mathrm{Spec}(-L) \subset \{0\} \cup [\lambda, \infty).$$

Le plus grand λ est appelé le **trou spectral** et est noté $\lambda_1(\mu)$.

L'inégalité **PI** descrit la convergence vers l''équilibre du semi-groupe associé dans L^2.

Bakry-Emery criterion"$\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$" ('84)

Bakry-Emery criterion"$\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$" ('84)

Pour $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$,

$$"\Gamma_2 \geq \rho\Gamma" \Leftrightarrow \mathrm{Hess}\ \mathrm{V}(x) \geq \rho, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Bakry-Emery criterion"$\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$" ('84)

Pour $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$,

$$"\Gamma_2 \geq \rho\Gamma" \Leftrightarrow \mathrm{Hess}\ \mathrm{V}(x) \geq \rho, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème (Bakry-Emery)

Si $\rho > 0$ alors ***PI****(ρ) est satisfaite.*

$$Var_\mu(f) \leq \frac{1}{\rho} \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu$$

Bakry-Emery criterion"$\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$" ('84)

Pour $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$,

$$"\Gamma_2 \geq \rho\Gamma" \Leftrightarrow \mathrm{Hess\ V}(x) \geq \rho, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème (Bakry-Emery)

*Si $\rho > 0$ alors **PI(ρ)** est satisfaite.*

$$Var_\mu(f) \leq \frac{1}{\rho} \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu$$

*et aussi l'inégalité de **Log-Sobolev**:*

$$Ent_\mu(f^2) \leq \frac{2}{\rho} \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu$$

Bakry-Emery criterion"$\Gamma_2 \geq \rho\Gamma$" ('84)

Pour $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$,

$$"\Gamma_2 \geq \rho\Gamma" \Leftrightarrow \mathrm{Hess}\ \mathrm{V}(x) \geq \rho, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème (Bakry-Emery)

*Si $\rho > 0$ alors **PI(ρ)** est satisfaite.*

$$Var_\mu(f) \leq \frac{1}{\rho} \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu$$

*et aussi l'inégalité de **Log-Sobolev**:*

$$Ent_\mu(f^2) \leq \frac{2}{\rho} \int_{\mathcal{M}} |\nabla f|^2 d\mu$$

Si V est **seulement convexe** ou **n'est pas convexe**, BE n'est pas satisfait.

Inégalités de Brascamp-Lieb généralisées

Inégalités de Brascamp-Lieb généralisées

Théorème ([ABJ18])

Soit $x \to A(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ lisse telle que $L(A^{-1})A$ est une matrice symétrique pour tout x.

Inégalités de Brascamp-Lieb généralisées

Théorème ([ABJ18])

Soit $x \to A(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ lisse telle que $L(A^{-1})A$ est une matrice symétrique pour tout x. Si $\text{Hess}\, V - L(A^{-1})A > 0$ pour tout x,alors

Inégalités de Brascamp-Lieb généralisées

Théorème ([ABJ18])

Soit $x \to A(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ *lisse telle que* $L(A^{-1})A$ *est une matrice symétrique pour tout* x. *Si* $\text{Hess } V - L(A^{-1})A > 0$ *pour tout* x*,alors*

$$Var_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T \left(\text{Hess } V - L(A^{-1})A\right)^{-1} (\nabla f)\, d\mu. \tag{3.9}$$

Inégalités de Brascamp-Lieb généralisées

Théorème ([ABJ18])

Soit $x \to A(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ lisse telle que $L(A^{-1})A$ est une matrice symétrique pour tout x. Si $Hess\ V - L(A^{-1})A > 0$ pour tout x, alors

$$Var_\mu(f) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T \left(Hess\ V - L(A^{-1})A\right)^{-1} (\nabla f)\, d\mu. \tag{3.9}$$

Corollaire ([ABJ18])

Par conséquent:

$$\lambda_1(\mu) \geq \sup_A \inf_x \rho(Hess\ V - LA^{-1}A)$$

Une preuve classique:

Une preuve classique:

Formule de Weizenböck :

$$\nabla L f = (\mathcal{L} - \nabla\nabla V)(\nabla f).$$

avec

$$\mathcal{L}(\nabla f) = \begin{pmatrix} L & & \\ & \ddots & \\ & & L \end{pmatrix} (\nabla f).$$

Une preuve classique:

Formule de Weizenböck :

$$\nabla L f = (\mathcal{L} - \nabla\nabla V)(\nabla f).$$

avec

$$\mathcal{L}(\nabla f) = \begin{pmatrix} L & & \\ & \ddots & \\ & & L \end{pmatrix} (\nabla f).$$

Alors

$$\nabla P_t f = Q_t^{\mathrm{Hess}\, V}(\nabla f)$$

avec $Q_t^{\mathrm{Hess}\, V}$ semi-groupe de Scrhödinger sur les gradients de générateur : $\mathcal{L} - \mathrm{Hess} V$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} f\,(f-\mu(f))\,d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty f\,LP_t f\,dt\,d\mu \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,\nabla P_t f\,d\mu\,dt \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,Q_t^{\mathrm{Hess}\,V}(\nabla f)\,d\mu\,dt \\
\mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,(-\mathcal{L}+Hess\;V)^{-1}(\nabla f)\,d\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} f\,(f-\mu(f))\,d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty f\,LP_t f\,dt\,d\mu \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,\nabla P_t f\,d\mu\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,Q_t^{\mathrm{Hess}\,V}(\nabla f)\,d\mu\,dt \\
\mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,(-\mathcal{L}+Hess\ V)^{-1}(\nabla f)\,d\mu \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T\,Hess\ V^{-1}\,(\nabla f)\,d\mu,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé:

$$
(-\mathcal{L}+Hess\ V)^{-1} \leq Hess\ V^{-1}.
$$

Autres entrelacements:

Lemme ([ABJ18])

$$A\nabla Lf \quad = A(\mathcal{L} - Hess\, V)(A^{-1}A\nabla f)$$

Autres entrelacements:

Lemme ([ABJ18])

$$\begin{aligned} A\nabla Lf &= A(\mathcal{L} - Hess\, V)(A^{-1}A\nabla f) \\ &= (\mathcal{L}_A - M_A)(A\nabla f) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_A F := \mathcal{L}F + 2\,A\nabla A^{-1}\nabla F, \qquad M_A := A\,(\nabla\nabla V - LA^{-1}A)A^{-1}.$$

Autres entrelacements:

Lemme ([ABJ18])

$$\begin{aligned} A\nabla Lf &= A(\mathcal{L} - Hess\, V)(A^{-1}A\nabla f) \\ &= (\mathcal{L}_A - M_A)(A\nabla f) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_A F := \mathcal{L}F + 2\, A\nabla A^{-1}\nabla F, \qquad M_A := A\,(\nabla\nabla V - LA^{-1}A)A^{-1}.$$

Sous l'hypothèse de symétrie, $-\mathcal{L}_A$ **est symétrique positif** ≥ 0 pour $S = (AA^T)^{-1}$,

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f)^T\, S\, (-\mathcal{L}_A + M_A)^{-1}(A\nabla f)\, d\mu$$

Autres entrelacements:

Lemme ([ABJ18])

$$\begin{aligned} A\nabla Lf &= A(\mathcal{L} - Hess\, V)(A^{-1} A\nabla f) \\ &= (\mathcal{L}_A - M_A)(A\nabla f) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_A F := \mathcal{L} F + 2\, A\nabla A^{-1}\, \nabla F, \qquad M_A := A\,(\nabla\nabla V - LA^{-1}\, A)A^{-1}.$$

Sous l'hypothèse de symétrie, $-\mathcal{L}_A$ **est symétrique positif** ≥ 0 pour $S = (AA^T)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f)^T\, S\, (-\mathcal{L}_A + M_A)^{-1}(A\nabla f)\, d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f)^T\, S\, M_A^{-1}\, (A\nabla f)\, d\mu \end{aligned}$$

Autres entrelacements:

Lemme ([ABJ18])

$$\begin{aligned} A\nabla Lf &= A(\mathcal{L} - Hess\, V)(A^{-1}A\nabla f) \\ &= (\mathcal{L}_A - M_A)(A\nabla f) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_A F := \mathcal{L}F + 2\,A\nabla A^{-1}\nabla F, \qquad M_A := A(\nabla\nabla V - LA^{-1}A)A^{-1}.$$

Sous l'hypothèse de symétrie, $-\mathcal{L}_A$ **est symétrique positif** ≥ 0 pour $S = (AA^T)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f)^T S\, (-\mathcal{L}_A + M_A)^{-1} (A\nabla f)\, d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f)^T S\, M_A^{-1} (A\nabla f)\, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T (Hess V - LA^{-1}A)^{-1} (\nabla f)\, d\mu, \end{aligned}$$

Autres entrelacements:

Lemme ([ABJ18])

$$\begin{aligned} A\nabla Lf &= A(\mathcal{L} - Hess\,V)(A^{-1}A\nabla f) \\ &= (\mathcal{L}_A - M_A)(A\nabla f) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_A F := \mathcal{L}F + 2\,A\nabla A^{-1}\nabla F, \qquad M_A := A\,(\nabla\nabla V - LA^{-1}A)A^{-1}.$$

Sous l'hypothèse de symétrie, $-\mathcal{L}_A$ **est symétrique positif** ≥ 0 pour $S = (AA^T)^{-1}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f)^T S\,(-\mathcal{L}_A + M_A)^{-1}(A\nabla f)\,d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (A\nabla f)^T S\,M_A^{-1}(A\nabla f)\,d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)^T (Hess V - LA^{-1}A)^{-1}(\nabla f)\,d\mu, \end{aligned}$$

Inégalités de Hardy

Inégalités de Hardy

Proposition (Cattiaux, Guillin..)

Pour toute fonction $w > 0$ et tout f

$$\int \frac{-Lw}{w} f^2 d\mu \leq \int -Lf\, f\, d\mu.$$

Inégalités de Hardy

Proposition (Cattiaux, Guillin..)

Pour toute fonction $w > 0$ et tout f

$$\int \frac{-Lw}{w} f^2 d\mu \leq \int -Lf\, f\, d\mu.$$

Proposition

Ici, sous la condition de symétrie: pour tout champ de vecteurs F,

$$\int -L(A^{-1})AF \cdot F\, d\mu \leq \int -\mathcal{L}F \cdot F\, d\mu.$$

Comparaison des spectres of $-L$ and $-\mathcal{L} + \mathrm{Hess}\, V$.

Comparaison des spectres of $-L$ and $-\mathcal{L} + \mathrm{Hess} V$.

Théorème (Johnsen,Helffer)

$L_{|1^\perp}$ et $(\mathcal{L} - HessV)_{|\nabla}$ sont unitairement équivalents ($U = \nabla(-L)^{-1/2}$).

Comparaison des spectres of $-L$ and $-\mathcal{L} + \mathrm{Hess}\, V$.

Théorème (Johnsen,Helffer)

$L_{|1^\perp}$ et $(\mathcal{L} - HessV)_{|\nabla}$ sont unitairement équivalents ($U = \nabla(-L)^{-1/2}$).
D'où

$$\sigma(L) - \{0\} = \sigma\left((\mathcal{L} - Hess\ V)_{|\nabla}\right) = \sigma\left((\mathcal{L}_A - M_A)_{|A\nabla}\right)$$

et

$$\lambda_1(L) = \begin{cases} \sigma_0\left((\mathcal{L} - Hess\ V)_{|\nabla}\right) \geq \inf_x \mathrm{Hess}\, V(x) \\ \sigma_0\left((\mathcal{L}_A - M_A)_{|A\nabla}\right) \geq \inf_x M_A(x). \end{cases}$$

Optimalité pour Poincaré inequality en dimension 1

Optimalité pour Poincaré inequality en dimension 1

En dimension dimension 1, en prenant $a^{-1} = h'$, $h' > 0$,

$$M_a = V'' - L(a^{-1})a = \frac{(-Lh)'}{h'}$$

Optimalité pour Poincaré inequality en dimension 1

En dimension dimension 1, en prenant $a^{-1} = h'$, $h' > 0$,

$$M_a = V'' - L(a^{-1})a = \frac{(-Lh)'}{h'}$$

Théorème (Formule de Chen et Wang [BJ14])

En prenant $a^{-1} = g_1'$, avec g_1 le premier vecteur propre, on a

$$M_a \equiv \lambda_1.$$

D'où: $\lambda_1 = \sup_a \inf_x V'' - L(a^{-1})a$.

- Formule de type Chen-Wang pour les valeurs propres d'ordre supérieur [BJ19].

- Cas $A = aId$, $\rightarrow$ une inégalité de **covariance asymétrique** $L^1 - L^\infty$ (Otto-Menz '13 , Carlen, Cordero-Erausquin et Lieb '13, [ABJ18]).

- Cas $A = aId$, $\rightarrow$ une inégalité de **covariance asymétrique** $L^1 - L^\infty$ (Otto-Menz '13 , Carlen, Cordero-Erausquin et Lieb '13, [ABJ18]).
- Si de plus $0 < \alpha \leq a \leq \beta$, $\rightarrow$ **concentration gaussienne**.

- Cas $A = aId$, $\rightarrow$ une inégalité de **covariance asymétrique** $L^1 - L^\infty$ (Otto-Menz '13 , Carlen, Cordero-Erausquin et Lieb '13, [ABJ18]).
- Si de plus $0 < \alpha \leq a \leq \beta$, $\rightarrow$ **concentration gaussienne**.
- En dimsension ≥ 1, $\rightarrow$ **inégalités de Brascamp-Lieb d'ordre 2** (Cordero-Erausquin '17, [BJ17]).
- le cas des variétés riemanniennes (Baptiste Huguet).

Exemples

Exemple 1: Inégalités de Poincaré à poids pour la gaussienne.

Exemples

Exemple 1: Inégalités de Poincaré à poids pour la gaussienne. $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$:

Exemples

Exemple 1: Inégalités de Poincaré à poids pour la gaussienne. $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$:

$$\mathrm{Var}_\gamma(f) \leq C(n) \int \frac{|\nabla f|^2}{1+|x|^2} d\gamma(x)$$

avec $C(n) \simeq n$.

Exemples

Exemple 1: Inégalités de Poincaré à poids pour la gaussienne. $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$:

$$\mathrm{Var}_\gamma(f) \leq C(n) \int \frac{|\nabla f|^2}{1+|x|^2} d\gamma(x)$$

avec $C(n) \simeq n$.

- mesures radiales (Bobkov, [BJM16]).

Exemples

Exemple 2: une perturbation quartique de la Gaussienne

Exemples

Exemple 2: une perturbation quartique de la Gaussienne

Proposition ([BJ17])

Soit V le potentiel

$$V(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^2}{2} + J \sum_{i=1}^{d} x_i^2\, x_{i+1}^2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec $J \geq 0$. Alors pour toute dimension dimension $d \geq 1$:

Exemples

Exemple 2: une perturbation quartique de la Gaussienne

Proposition ([BJ17])

Soit V le potentiel

$$V(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^2}{2} + J \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \, x_{i+1}^2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec $J \geq 0$*. Alors pour toute dimension dimension* $d \geq 1$*:*

- $\lambda_1 \geq \frac{1+\sqrt{1-16J}}{2}$ *pour tout* $0 \leq J \leq \frac{1}{16}$*;*

Exemples

Exemple 2: une perturbation quartique de la Gaussienne

Proposition ([BJ17])

Soit V le potentiel

$$V(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^2}{2} + J \sum_{i=1}^{d} x_i^2\, x_{i+1}^2, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

avec $J \geq 0$. Alors pour toute dimension dimension $d \geq 1$:

- $\lambda_1 \geq \frac{1+\sqrt{1-16J}}{2}$ *pour tout* $0 \leq J \leq \frac{1}{16}$;
- $\lambda_{d+1} \geq \frac{1+\sqrt{1-16J}}{2} + \frac{\sqrt{1-16J}+\sqrt{1-32J}}{2}$ *pour tout* $0 \leq J \leq \frac{1}{32}$.

Etude du laplacien discret sur un graphe infini

Graphe $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, m)$,

Etude du laplacien discret sur un graphe infini

Graphe $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, m)$,

$$\Delta_{\mathcal{G}} f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in \mathcal{V}, y \simeq x} \mathcal{E}(x, y) \left(f(x) - f(y) \right).$$

Ici $\Delta \geq 0$.

Etude du laplacien discret sur un graphe infini

Graphe $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, m)$,

$$\Delta_{\mathcal{G}} f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in \mathcal{V}, y \simeq x} \mathcal{E}(x,y) \left(f(x) - f(y)\right).$$

Ici $\Delta \geq 0$.

Proposition (Inégalité de Hardy [HK11, Gol14, BG15])

Soit W une fonction strictement positive sur $\mathcal{V}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathcal{V})$,

$$Q(f,f) = \langle f, \Delta_m f \rangle_m \geq \langle f, \frac{\tilde{\Delta}_m W}{W} f \rangle_m.$$

Dans [BG15]:

- des critères géométriques pour construire de bonnes fonctions super-harmoniques W.
- une représentation probabiliste des fonctions super-harmoniques.
- amélioration des résultats de comparaison de Keller-Lenz-Wojciechowski '13.
- étude de graphes faiblement radialement symétriques.

Dans [BG15]:

- des critères géométriques pour construire de bonnes fonctions super-harmoniques W.
- une représentation probabiliste des fonctions super-harmoniques.
- amélioration des résultats de comparaison de Keller-Lenz-Wojciechowski '13.
- étude de graphes faiblement radialement symétriques.

Golénia '14: Sur un arbre infini: $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon > 0$

$$(1-\varepsilon)(\mathrm{deg}) - \tilde{k}_\varepsilon \le \Delta \le (1+\varepsilon)(\mathrm{deg}) + \tilde{k}_\varepsilon \tag{4.10}$$

Dans [BG15]:

- des critères géométriques pour construire de bonnes fonctions super-harmoniques W.
- une représentation probabiliste des fonctions super-harmoniques.
- amélioration des résultats de comparaison de Keller-Lenz-Wojciechowski '13.
- étude de graphes faiblement radialement symétriques.

Golénia '14: Sur un arbre infini: $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon > 0$

$$(1-\varepsilon)(\mathrm{deg}) - \tilde{k}_\varepsilon \leq \Delta \leq (1+\varepsilon)(\mathrm{deg}) + \tilde{k}_\varepsilon \tag{4.10}$$

Dans [BGK15], avec des techniques isopérimétriques: équivalence entre (4.10) et les **graphes presques creux**.

Dans [BG15]:

- des critères géométriques pour construire de bonnes fonctions super-harmoniques W.
- une représentation probabiliste des fonctions super-harmoniques.
- amélioration des résultats de comparaison de Keller-Lenz-Wojciechowski '13.
- étude de graphes faiblement radialement symétriques.

Golénia '14: Sur un arbre infini: $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon > 0$

$$(1-\varepsilon)(\mathrm{deg}) - \tilde{k}_\varepsilon \leq \Delta \leq (1+\varepsilon)(\mathrm{deg}) + \tilde{k}_\varepsilon \tag{4.10}$$

Dans [BGK15], avec des techniques isopérimétriques: équivalence entre (4.10) et les **graphes presques creux**. Dans [BGK$^+$17], étude pour des Laplaciens magnétiques.

The end!

Merci à tous
pour votre attention!

The end!

Merci à tous
pour votre attention!

et un merci particulier à:
M. Arnaudon, D. Bakry, F. Baudoin, D. Chafaï, L. Chen, N. Garofalo, S. Golénia, R. Herry, A. Joulin, N. Juillet, M. Keller, S.Liu, Y. Ma, F. Münch, I. Munive, B.Qian

Marc Arnaudon, Michel Bonnefont, and Aldéric Joulin.
Intertwinings and generalized Brascamp-Lieb inequalities.
Rev. Mat. Iberoam., 34(3):1021–1054, 2018.

Fabrice Baudoin and Michel Bonnefont.
Log-Sobolev inequalities for subelliptic operators satisfying a generalized curvature dimension inequality.
J. Funct. Anal., 262(6):2646–2676, 2012.

Fabrice Baudoin and Michel Bonnefont.
Sub-Riemannian balls in CR Sasakian manifolds.
Proc. Amer. Math. Soc., 141(11):3919–3924, 2013.

Fabrice Baudoin and Michel Bonnefont.
Curvature-dimension estimates for the Laplace-Beltrami operator of a totally geodesic foliation.
Nonlinear Anal., 126:159–169, 2015.

Dominique Bakry, Fabrice Baudoin, Michel Bonnefont, and Djalil Chafaï.