DS 1 – Analyse – MEEF

S.Golénia le 26 octobre 2017

Durée 3H.

Cours : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles. Traduiser les assertions suivantes grâce à des quantificateurs.

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$,

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas,

3) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$,

4) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 1 : Montrer l'existence et calculer les limites des suites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$,

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^3}$,

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+n^2) - \ln(n^2-4)$,

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)+n}{n^2}$.

Exercice 2 : Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=106}^{253} (3k+1)$,

2) $\displaystyle\sum_{k=106}^{253} (3^k + 2^{k+3})$,

2) $\displaystyle\sum_{k=106}^{253} k3^k$. On pourra d'abord calculer $\sum_{k=?}^{?} x^k$ et la dériver.

Exercice 3 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+2} + 3u_{n+1} - 4u_n = 0$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$. Donner l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) := \dfrac{x+3}{2x}$.

1) Faire une étude des variations de la fonction f sur $]0,\infty[$.

2) Calculer u_1 et u_2.

3) Montrer que $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

5) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

6) Résoudre $(f \circ f)(x) = x$ pour $x > 0$.

7) Déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

8) Montrer que $|f'(x)| \leq a$ pour tout $x \geq u_2$, où $a := 0,96$.

9) Montrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq a|u_n - u_{n-1}|$ pour tout $n \geq 3$.

10) Montrer que $\left|\dfrac{3}{2} - u_n\right| \leq \dfrac{a^{n-2}}{1-a}|u_3 - u_2|$.

11) Donner n tel que $\left|\dfrac{3}{2} - u_n\right| \leq 10^{-10}$.

Exercice 5 : On suppose que $\lim_{n\to\infty} \cos(n)$ existe et vaut l.

1) En utilisant

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

démontrer que $l \in \{-1/2, 1\}$.

2) En utilisant

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

avec $a = n$ et $b \in \{-1, 1\}$. Trouver une contradiction et déduire que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.