

DS 2 – Analyse – MEEF

S.Golénia

le 21 décembre 2017

Durée 2H.

Cours : Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$

1. Donner la formule de Taylor avec reste intégrale de f au point 0 à l'ordre n .
2. Donner la formule de Taylor-Lagrange (celle avec $\exists c \in]?, ?[$) de f au point 0 à l'ordre n .

Exercice : Dans cet exercice, nous redémontrerons des propriétés classiques des fonctions $\tanh$ et artanh . Beaucoup de questions sont indépendantes.

On rappelle que

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

1. Calculer : $\int_0^{\ln(2)} \tanh(x) dx$.
2. Montrer que $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer : $\int_0^{\ln(2)} \tanh^2(x) dx$.
4. Faire le tableau de variation de la fonction $\tanh$ en précisant les limites en $\pm\infty$.
5. Montrer, par deux méthodes différentes, que

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

On pourra par exemple utiliser d'une part la définition de $\tanh$, i.e., comme quotient de $\sinh$ par $\cosh$ et d'autre part en utilisant la question 2.

6. Dédire la position de la tangente à la courbe représentative de $\tanh$ et sa position relative (localement).
7. Tracer la courbe représentative de $\tanh$ et de la tangente en 0.
8. Montrer que :

$$\tanh(x) = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} + o(e^{-4x}), \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

9. Démontrer que $\tanh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. On note artanh la bijection réciproque.

10. Montrer que $\operatorname{artanh}(0) = 0$.
11. Tracer la courbe représentative de artanh sur le même graphique que dans la question 7. Expliquer le rôle de la droite d'équation $y = x$.
12. Tracer les fonctions $x \mapsto \operatorname{artanh}(\tanh(x))$ et $x \mapsto \tanh(\operatorname{artanh}(x))$ sur leur domaine de définition respectif (que l'on précisera).
13. Expliquer pourquoi artanh est dérivable et démontrer que $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

14. Montrer que

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \text{ pour tout } x \in]-1, 1[.$$

15. Calculer:

$$\int_0^{1/2} \operatorname{artanh}(x) dx.$$

16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{artanh}'(x) = 1 + x^2 + \dots + x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}.$$

17. Dédurre que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{artanh}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

On expliquera l'existence de la limite.