TD 1: norme, distance et des éléments de la topologie dans $\mathbb{R}$

Dans cette fiche, d est un entier naturel non-nul. L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni d'une norme N qui elle-même induit une distance notée d_N. Par exemple, la norme 1 notée $||.||_1$ qui induit la distance d_1 ou la norme 2 notée $||.||_2$ qui induit la distance d_2 ou la norme ∞ notée $||.||_\infty$ qui induit la distance d_∞.

Exercice 1. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ et le produit scalaire est défini par

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j.$$

(1) Rappeler les propriétés élémentaires du produit scalaire.
(2) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS), i.e.,

$$|(x, y)| \leq ||x||_2 ||y||_2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(3) Démontrer que l'égalité dans l'inégalité (CS) a lieu ssi les vecteurs x, y sont colinéaires (parallèles).

Exercice 2. Montrer que toute boule $B(x, r),\ x \in \mathbb{R}^d,\ r \geq 0$, est ouverte, et toute boule $\bar{B}(x, r)$ $(= B_f(x, r))$ est fermée.

Exercice 3.
(1) Soit $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'ouverts. Montrer que $\cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ est un ouvert. Dans le cas où $A = (1, \ldots, n)$ est une famille finie, montrer que $\cap_{j=1}^n O_j$ est ouvert. Donner un exemple où la famille A est infinie et la conclusion de la question précédente n'a pas lieu.
(2) Idem pour les ensembles fermés: soit $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fermés. Montrer que $\cap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est un fermé. Dans le cas où $A = (1, \ldots, n)$ est une famille finie, montrer que $\cup_{j=1}^n F_j$ est fermé. Donner un exemple où la famille A est infinie et la conclusion de la question précédente n'a pas lieu.

Exercice 4. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.
(1) Montrer que $\overline{\mathbb{R}^d \backslash A} = \mathbb{R}^d \backslash A^\circ$.
(2) Montrer que $\left(\mathbb{R}^d \backslash A\right)^\circ = \mathbb{R}^d \backslash \overline{A}$.
(3) Montrer que A est dense si et seulement si $\mathbb{R}^d \backslash A$ est d'intérieur vide.

Exercice 5.
(1) Montrer que A est ouvert ssi $A = A^\circ$.
(2) Montrer que A est fermé ssi $A = \bar{A}$.

Exercice 6. Soit A, B des parties de $\mathbb{R}^d$.
(1) Montrer que si $A \subset B$, alors $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
(2) Montrer que

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \quad A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ,$$

et donner un exemple où la dernière inclusion n'est pas stricte.

(3) Montrer que

$$(A \cup B)\bar{=}\bar{A} \cup \bar{B}, \quad (A \cap B)\bar{\subset}\bar{A} \cap \cup\bar{B},$$

et donner un exemple où la dernière inclusion n'est pas stricte.

Exercice 7.

(1) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad ||x||_1 \leq \sqrt{d}||x||_2 \leq p||x||_\infty.$$

(2) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad ||x||_\infty \leq ||x||_1.$$

(3) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad ||x||_2 \leq ||x||_1.$$

Exercice 8. Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ i.e., vérifiant

$$\forall (c_1, c_2) \in C^2, \quad [c_1, c_2] \subset C.$$

(1) Montrer que $\overline{C}$ est une partie convexe fermée.

(2) Montrer que C° est une partie convexe ouverte.

Exercice 9. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est discret si tous ses points sont isolés i.e.,

$$\forall a \in A, \exists r > 0, \quad]a - r, a + r[\cap A = \{a\}.$$

(1) Donner des exemples de sous-ensembles $\mathbb{R}$ dénombrables, d'intérieurs vides, fermés et discrets.

(2) Montrer qu'une partie discrète de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide.

(3) Une partie discrète de $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement fermée?

(4) Que pouvez-vous dire d'un compact discret de $\mathbb{R}$?

(5) Une partie d'intérieur vide de $\mathbb{R}$ est-elle discrète?

(6) Montrer qu'une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide.

(7) Une partie d'intérieur vide est-elle dénombrable?

Exercice 10. Montrer qu'une partie discrète de $\mathbb{R}$ est forcément dénombrable. Vous pourriez utiliser le fait qu'une famille $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'intervalles ouverts non-vides deux é deux disjoints de $\mathbb{R}$ est forcément indexée par un ensemble Λ dénombrable.

Exercice 11. Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme N. On définit une fonction

$$\begin{array}{rccl} d_N(*, A): & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & d_N(X, A) = \inf_{a \in A} d_N(X, a). \end{array}$$

(1) Montrer que cette fonction est bien définie.

(2) Montrer que

$$\forall (X_1, X_2) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^2, \quad |d_N(X_1, A) - d_N(X_2, A)| \leq d_N(X_1, X_2).$$

Exercice 12. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^d$. On définit $A+B$ par

$$A+B = \{a+b, (a,b) \in A \times B\} \subset \mathbb{R}^d.$$

(1) Montrer que si Ω est un ouvert alors $A+\Omega$ l'est aussi.
(2) La somme de deux ouverts est-elle un ouvert?
(3) La somme de deux fermés est-elle un fermé?
(4) Montrer que si K est un compact et F est un fermé alors $K+F$ est un fermé.
(5) Montrer que si K_1 et K_2 sont deux compacts alors K_1+K_2 est un compact.

Exercice 13. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels et

$$X = \{x_n, n \geq 0\}.$$

(1) Montrer que X est une partie discrète de $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que X est fermé si est seulement la suite x n'est pas majorée.