Chapitre 3

Suites de fonctions - Intégrales

La notion de convergence d'une suite de fonctions est une notion topologique et peut donc prendre des significations différentes selon la topologie considérée. Dans tout ce chapitre, nous considèrerons la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Il est bien connu que la limite uniforme d'une suite réelle de fonctions continues est continue mais que ce résultat est faux pour des fonction dérivables. Nous allons voir que l'holomorphie (dérivabilité complexe) est une notion plus rigide que la dérivabilité réelle : elle est conservée par passage à la limite (pour la topologie de la convergence uniforme).

I. Suites de fonctions

La convergence uniforme sur tout compact est définie de la façon suivante : si D est un ouvert de $\mathbb{C}$, f et $(f_n)_n$ des fonctions définie sur D, on dit que $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout compact de D si pour tout compact K de D on a :

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \to_{n\to\infty} 0.$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une fonction continue est holomorphe dans un ouvert D de $\mathbb{C}$ si elle vérifie la formule de Cauchy sur tout disque inclus dans D. Nous pouvons en tirer la conséquence suivante :

Théorème 1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, convergeant uniformément sur tout compact de D vers une fonction f. Alors :*
(i) f est holomorphe sur D
(ii) pour tout entier naturel p, $f_n^{(p)} \to f^{(p)}$ uniformément sur tout compact de D.

Démonstration : L'application f est continue sur D comme limite uniforme de fonctions continues. Il suffit donc de montrer que f vérifie la formule de Cauchy sur tout disque inclus dans D. Soit $\overline{D(a,r)}$ un tel disque. Pour tout z dans $D(a,r)$ et tout entier naturel n on a :

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD(a,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

La suite de fonctions $\left(\zeta \mapsto \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\right)_n$ converge uniformément sur $bD(a,r)$ vers la fonction $z \mapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{bD(a,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{bD(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

ce qui montre la partie (i).

(ii) Pour montrer que $(f_n^{(p)})_n$ converge vers $f^{(p)}$, donnons-nous un compact K inclus dans D et étudions la différence $f_n - f$. D'après les inégalités de Cauchy (voir chapitre précédent), nous avons une estimation de la dérivée p-ième de cette fonction au centre de tout disque inclus dans D, en fonction des valeurs au bord de cette fonction. Si $r = dist(K, bD)$ (cette distance est strictement positive), posons $K' = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, K) \leq \frac{r}{2}\}$. L'ensemble K' est un compact inclus dans D tel que K soit inclus dans l'intérieur de K'. Si z est un point quelconque de K, le disque $D(z, \frac{r}{2})$ est inclus dans K' et, d'après les inégalités de Cauchy on a :

$$\begin{aligned} |f_n^{(p)} - f^{(p)}| &\leq \frac{2^p p!}{r^p} \sup_{\overline{D(z,r/2)}} |f_n - f| \\ &\leq \frac{2^p p!}{r^p} \sup_{K'} |f_n - f|. \end{aligned}$$

La suite $(f_n)_n$ tendant vers f uniformément sur K', on obtient le résultat voulu. ■

Le théorème 1 s'applique aux séries de fonctions :

Corollaire 1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert D de $\mathbb{C}$. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de D. Alors la fonction F définie sur D par $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est holomorphe sur D et :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall z \in D,\ F^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z).$$

Ce corollaire établit que pour une série uniformément convergente de fonctions holomorphes, on peut "dériver sous le signe somme".

Démonstration : Pour tout entier n la fonction F_n définie par $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ est holomorphe sur D, de dérivée p-ième $F_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{n} f_k^{(p)}$. Par hypothèse la suite $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout compact de D : on peut appliquer le théorème 1. ■

Exemples :

1. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, elle définit une fonction holomorphe sur $D(0,R)$ comme limite uniforme sur tout compact inclus dans $D(0,R)$ de la suite de fonctions holomorphes $(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k)_n$.

2. La série $\sum n^{-z}$ définit une fonction holomorphe sur $E = \{z \in \mathbb{C} : Rez > 1\}$.

Considérons en effet la suite de polynômes $(P_n)_n$ définie par $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} n^{-z}$. Si K est un compact quelconque inclus dans E, il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\inf_{z\in K} Rez \geq \alpha$. Le reste $\sum_{k\geq n} n^{-\alpha}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. L'inégalité $\left|n^{-z}\right| \leq n^{-\alpha}$, vraie sur

K entraîne que la suite $(P_n)_n$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{-z}$, uniformément sur K. Le théorème 1 permet de conclure.

Nous pouvons appliquer ce qui précède à l'étude des produits infinis de fonctions holomorphes.

Définition 1. *Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit infini $\prod a_n$ converge si la suite $(P_n = \prod_{k=0}^{n} a_n)_n$ converge.*

Ainsi, si $a_n = \dfrac{1}{n}$, le produit $\prod a_n$ converge, de somme nulle.

Proposition 1. *Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. On a les implications suivantes :*

$$\prod(1 + |a_n|) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ converge } \Rightarrow \prod(1 + an) \text{ converge.}$$

Si la première implication est une équivalence, il n'en est pas de même de la seconde : il suffit de considérer la suite $(a_n = -1)_n$.

Démonstration : Toutes les quantités $1 + |a_n|$ étant supérieures ou égales à 1, la convergence du produit infini est équivalente à la convergence de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1 + |a_k|)\right)_n$, ce qui est équivalent à convergence de la série de terme général $\ln(1 + |a_n|)$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ et donc $\ln(1 + |a_n|) \sim |a_n|$ en $+\infty$. Ceci montre la première équivalence.

Pour montrer la seconde implication, considérons $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a_n)$. La suite $(P_n)_n$ vérifie la formule de récurrence :

$$P_{n+1} = (1 + a_{n+1})P_n.$$

Ainsi, puisque $|1 + a_n| \leq 1 + |a_n| \leq \exp(|a_n|)$, nous obtenons $|P - n| \leq \exp(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|)$. Ceci prouve que la suite $(P_n)_n$ est bornée. En particulier, puisque $P_{n+1} - P_n = a_{n+1}P_n$, il vient $|P_{n+1} - P_n| \leq \exp(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|)\ |a_{n+1}|$ et donc, si k est un entier quelconque :

$$|P_{n+k} - P_n| \leq \exp(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|) \sum_{p=n+1}^{n+k} |a_p|.$$

La suite $(P_n)_n$ est donc une suite de Cauchy, ce qui montre la convergence du produit $\prod(1 + a_n)$. ∎

Exemple d'application : considérons le produit infini $z\prod(1 - \dfrac{z^2}{n^2})$ défini pour $n > 0$. La série de terme général $\dfrac{z^2}{n^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ puisque $\dfrac{z^2}{n^2}$ est dominé par $\dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers l'infini. D'après la proposition 1, le produit est normalement convergent sur tout compact de $\mathbb{C}$.

II. Intégrales dépendant d'un paramètre

Parallèlement à l'étude de l'holomorphie d'une série de fonctions, on peut s'intéresser à l'holomorphie d'une fonction intégrale dépendant d'un paramètre. Si f est une fonction des deux variables t et z, définie sur $I \times D$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et D un ouvert de $\mathbb{C}$, sous quelles conditions la fonction $z \mapsto \int_I f(t,z)dt$ définit-elle une fonction holomorphe sur D ? Il faut nécessairement que la fonction $t \mapsto f(t,z)$ soit intégrable sur I pour tout z dans D. De plus, il est naturel d'imposer à la fonction $z \mapsto f(t,z)$ d'être holomorphe sur D pour tout t dans I. On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de $I \times D$ dans $\mathbb{C}$. On suppose :*
(a) $\forall z \in D,\ t \mapsto f(t,z)$ est mesurable sur I
(b) $\forall t \in I,\ z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur D
(c) il existe φ intégrable sur I telle que : $\forall z \in D,\ |f(t,z)| \leq \varphi(t)$.

Alors : (i) $t \mapsto f(t,z)$ est intégrable sur I
(ii) $F : z \mapsto \int_I f(t,z)dt$ est holomorphe sur D et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in D,\ F^{(p)}(z) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial z^p}(t,z)dt.$$

Comme nous le verrons par la suite, ce théorème va permettre de définir des primitives de fonctions holomorphes.

Démonstration : (i) est immédiat (hypothèse de domination).
(ii) Soit z_0 un point quelconque de D. Montrons que F est dérivable en z_0; calculons pour cela le quotient $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$.

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \int_I \frac{f(t,z)-f(t,z_0)}{z-z_0}dt.$$

La limite quand z tend vers z_0 du quotient $\dfrac{f(t,z)-f(t,z_0)}{z-z_0}$ étant la dérivée de f par rapport à z en (t,z_0), il nous faut permuter la dérivation et l'intégration. Soit $r > 0$ tel que le disque $D(z_0,r)$ soit inclus dans D. A t fixé dans I, la fonction $z \mapsto \dfrac{f(t,z)-f(t,z_0)}{z-z_0}$ est holomorphe sur D et d'après le principe du maximum appliqué sur $D(z_0,r)$, on a :

$$\forall z \in D(z_0,r),\ \forall t \in I,\ \left|\frac{f(t,z)-f(t,z_0)}{z-z_0}\right| \leq \sup_{\zeta \in bD(z_0,r)} \left|\frac{f(t,z)-f(t,z_0)}{z-z_0}\right| \leq \frac{2\varphi(t)}{r}.$$

Si $(z^n)_n$ est une suite de points convergeant vers z_0, le théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions $t \mapsto \dfrac{f(t,z^n)-f(t,z_0)}{z-z_0}$ (ces fonctions sont intégrables d'après ce qui précède) nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \frac{f(t,z^n)-f(t,z_0)}{z-z_0}dt = \int_I \lim_{n\to\infty} \frac{f(t,z^n)-f(t,z_0)}{z-z_0}dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t,z_0)dt.$$

On peut alors réitérer cet argument sur toutes les dérivées d'ordre supérieur. ■

Remarque 1. *Le théorème 2 est d'utilisation assez souple. Ainsi, si pour tout z_0 dans D, il existe un ouvert U tel que $z_0 \in U \subset D$ et une application φ intégrable sur I tels que $|f(t,z)| \leq \varphi(t)$ pour tout z dans U et tout t dans I, le théorème 2 dit que la fonction F est holomorphe en z_0. Ceci étant vrai pour tout z_0 dans D, la fonction F est holomorphe sur D.*

Exemple : La fonction F définie sur $E = \{z \in \mathbb{C} : Rez > 1\}$ par :

$$F(z) = \int_1^{+\infty} t^{-z} dt$$

est holomorphe sur E.

Considérons en effet la fonction f définie sur $I = [1, +\infty[\times E$ par $f(t,z) = t^{-z} = \exp(-z \ln t)$. Les conditions (a) et (b) du théorème 2 sont évidemment vérifiées.

Condition (c) : soit z_0 un point quelsonque de E et α un réel vérifiant $1 < \alpha < Rez$. La fonction $\varphi : t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur I et vérifie :

$$\forall Rez > \alpha, \ \forall t \in I, \ |t^{-z}| \leq \varphi(t).$$

Le théorème 2 montre alors que la fonction F est holomorphe au voisinage de tout point de E c'est-à-dire sur E.

On peut remarquer que nous n'avons pas obtenu une majoration sur E directement : on aurait dû prendre $\alpha = 1$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur I.

Le théorème 2 permet de définir des primitives de fonctions holomorphes. Nous rappelons qu'un ouvert D de $\mathbb{C}$ est **étoilé** s'il existe un point a de D tel que pour tout point z de D, le segment $[a,z]$ soit inclus dans D.

Corollaire 2. *Si D est un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, toute application holomorphe sur D admet une primitive sur D.*

Ce corollaire généralise le résultat rencontré dans le chapitre précédent.

Démonstration : Soit f une fonction holomorphe définie sur l'ouvert étoilé D de $\mathbb{C}$. Recherchons une fonction F holomorphe sur D telle que $F' = f$ sur D. Si g est la fonction d'une variable réelle t définie sur $[0,1]$ par $g(t) = F(a+t(z-a))$, $F(z)-F(a) = g(1)-g(0) = \int_0^1 g'(t)dt$. L'égalité $g'(t) = (z-a)F'(a+t(z-a))$ nous montre que F, si elle existe, est nécessairement définie par $F(z) - F(a) = \int_0^1 (z-a)f(a+t(z-a))dt$. Il reste maintenant à montrer que la fonction F ainsi définie convient.

Soit h la fonction définie sur $[0,1] \times D$ par $h(t,z) = (z-a)f(a+t(z-a))$. Elle est continue sur $[0,1] \times D$, donc mesurable en t. De plus, si z_0 est un point de D et si $r > 0$ est tel que $D(z_0, r)$ soit inclus dans D, $\sup_{z \in D(z_0,r)} |h(t,z)| = C \in \mathbb{R}$ et la fonction $t \in [0,1] \mapsto C$ est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème 2 la fonction F est holomorphe sur $D(z_0,r)$ de dérivée la fonction f. Ceci étant vrai pour tout point z_0 de D, nous venons de montrer que la fonction F est holomorphe sur D de dérivée f. ■

III. Application

D'après le corollaire 2 la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ admet une primitive sur tout ouvert étoilé ne contenant pas 0. Considérons par exemple l'ouvert étoilé $D_\theta = \mathbb{C}\backslash D_\theta$ où D_θ est la demi-droite d'origine 0 et d'angle θ avec la demi-droite des x positifs. On peut ainsi construire sur chaque ouvert D_θ un "logarithme complexe"! Il est bien évidemment impossible de définir le logarithme complexe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ comme fonction réciproque de la fonction exponentielle, de façon identique à la construction réelle, l'exponentielle complexe n'étant pas bijective sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. On peut cependant définir une détermination du logarithme complexe sur chaque ouvert D_θ. Nous allons nous intéresser plus précisément à la détermination principale du logarithme complexe :

Définition 2. *La détermination principale φ du logarithme complexe est la primitive de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ sur l'ouvert étoilé $D_{-\pi} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, nulle en 1.*

Les principales propriétés de φ sont données par la proposition suivante :

Proposition 2. *Pour tout z dans $D_{-\pi}$ on a :*
(i) $\exp(\varphi(z)) = z$.
(ii) $Re\varphi(z) = \ln|z|$.
(iii) $Im\varphi(z) \in]-\pi, \pi[$.

Démonstration : (i) La fonction φ est holomorphe sur $D_{-\pi}$ comme primitive de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$. La fonction $\exp\circ\varphi$ est holomorphe sur $D_{-\pi}$ de dérivée $(\exp\circ\varphi)' = 1$; la condition $\exp\circ\varphi(1) = 1$ donne le résultat.
(ii) $\varphi(z) = Re\varphi(z) + iIm\varphi(z)$ et donc $\exp(Re(\varphi(z)))\exp(Im(\varphi(z))) = z$. Par identification, on obtient : $\exp(Re(\varphi(z))) = |z|$ soit $Re(\varphi(z)) = \ln|z|$.
(iii) $Im\varphi(z)$ est un argument de z. Pour tout z dans $D_{-\pi}$, il existe donc un entier relatif k tel que $Im\varphi(z)$ appartienne à $]-\pi, \pi[+2k\pi$. L'application $z \mapsto Im(\varphi(z))$ étant continue sur l'ensemble connexe $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $\{Im(\varphi(z)), z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-\}$ est connexe. La condition $Im(\varphi(1)) = 0$ donne le résultat. ■

Remarque 2. *la fonction φ ne vérifie pas $\varphi(zz') = \varphi(z) + \varphi(z')$ pour tout z, z' dans $D_{-\pi}$. En effet si $z = z' = i$, on ne peut pas définir $\varphi(zz')$.*

En observant la propriété (i) de la proposition 2, on peut se demander si la fonction φ est la bijection réciproque de l'exponentielle complexe. Les parties (ii) et (iii) de la proposition 2 imposent des conditions sur l'ouvert de définition de l'exponentielle : on doit se restreindre à l'ouvert $B = \{z \in \mathbb{C} : Imz \in]-\pi, \pi[\}$.

Proposition 3. *La fonction φ est la bijection réciproque de l'exponentielle restreinte à B.*

Démonstration : Il faut montrer :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall z \in D_{-\pi},\ \exp(\varphi(z)) = z \\ (ii) & \exp(B) \subset D_{-\pi} \\ (iii) & \forall z \in B,\ \varphi(\exp(z)) = z. \end{array}$$

La propriété (i) a été démontrée dans la proposition 2.

$(ii) - (iii)$: Soit $z = x + iy$ un point de B. L'égalité $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$ que $\exp(z)$ appartient à $D_{-\pi}$. Enfin, l'application $\varphi \circ \exp$ est bien définie sur B, holomorphe sur B et :

$$\forall z \in B,\ (\varphi \circ \exp)'(z) = \varphi'(\exp(z))\exp(z) = 1.$$

Ainsi, puisque $(\varphi \circ \exp)(0) = 0$ (on rappelle que par définition $\varphi(1) = 0$) il vient : $\varphi \circ \exp = id$.
■

La fonction φ est finalement définie sur $D_{-\pi}$ par :

$$\forall z \in D_{-\pi},\ \varphi(z) = \ln|z| + iarg(z)$$

où $arg(z)$ appartient à $]-\pi, \pi[$.

Remarque 3. *Nous pouvons définir plus généralement une détermination φ_θ du logarithme complexe sur l'ouvert D_θ pour tout θ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall z \in D_\theta,\ \varphi_\theta(z) = \ln|z| + i(arg_\theta(z))$$

où $arg_\theta(z)$ est l'argument de z pris dans $]\theta, \theta + 2\pi[$.

Les propriétés de cette fonction sont données dans l'exercice 5.

Exercices du chapitre 3

Exercice 1 :

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{2^n}{z^n+1}$ (n variant dans $\mathbb{N}$) définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D(0,2)}$.

2. En déduire que la série $\sum \dfrac{nz^{n-1}}{(z^n+1)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\overline{D(0,2)}$.

Exercice 2 : Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{z-p}$ (p variant dans $\mathbb{Z}$) définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

Exercice 3 : Montrer que la fonction Φ définie par $\Phi(z) = \int_0^1 t^z(1-t)^{1-z}dt$ est holomorphe sur $B = \{z \in \mathbb{C} : -1 < Rez < 2\}$.

Exercice 4 : Les produits infinis $\prod \left(1 + \dfrac{\sin^2 z}{n \ln n}\right)$ et $\prod \exp(z\cos(1-\dfrac{1}{n}))$ sont-ils convergents ?

Exercice 5 :

1. Soit $B = \{z \in \mathbb{C} : \pi < Imz < 3\pi\}$. Si φ est la détermination principale du logarithme complexe, montrer que :

$$\forall z \in B,\ \varphi(\exp(z)) = z - 2i\pi.$$

2. Soit θ un réel et φ_θ la détermination du logarithme complexe sur D_θ.

a. Montrer que $\varphi'_\theta(z) = \dfrac{1}{z}$ pour tout z dans D_θ.

b. Montrer que φ_θ est la bijection réciproque de exp définie sur $\{z \in \mathbb{C} : \theta < Imz < \theta+2\pi\}$.

Exercice 6 : Si φ désigne la détermination principale du logarithme complexe, on définit les deux fonctions f et g par :

$$f(z) = \varphi(z-1) - \varphi(z+1), \quad g(z) = -\varphi(-1-z) + \varphi(1-z).$$

a. Donner les ensembles de définition de f et g.

b. Calculer les dérivées de f et g.

c. Calculer $f(it)$ et $g(it)$ pour t réel non nul.

d. Trouver une fonction F holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ de dérivée $\dfrac{2}{z^2-1}$.