Chapitre 4

Théorie locale des fonctions holomorphes

Nous allons nous intéresser maintenant à l'étude locale d'une fonction holomorphe. Le problème initial est le suivant : si z_0 est un point de $\mathbb{C}$, U un voisinage de z_0 et f une fonction holomorphe sur $U\setminus\{z_0\}$, la fonction f se prolonge-t-elle holomorphiquement en z_0 ? Nous avons vu dans le second chapitre une condition nécessaire et suffisante : la fonction doit être bornée au voisinage de z_0 pour pouvoir être prolongée holomorphiquement à U. La réponse est bien sûr négative dans le cas général : il suffit de considérer la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Le point 0 est une singularité non éliminable pour cette fonction. Il en est de même pour la fonction $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$. Cependant le comportement à l'origine diffère dans ces deux exemples. Si la limite de $\left|\frac{1}{z}\right|$ en 0 est infinie, la limite de $\exp(\frac{1}{z})$ en 0 est nulle pour z réel négatif et infinie pour z réel positif.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la classification des **singularités** d'une fonction holomorphe. Dans la seconde partie, nous établirons des formules intégrales permettant de "compter" les zéros d'une fonction holomorphe et de déterminer le **résidu** d'une fonction **méromorphe** (les différentes définitions sont données ultérieurement). Nous conclurons en appliquant le calcul de ces intégrales au calcul d'intégrales réelles.

Singularités d'une fonction holomorphe

Nous avons vu qu'une fonction holomorphe sur un disque est développable en série entière (en $z - z_0$ si z_0 est le centre du disque). Il n'en est plus de même pour une fonction qui ne serait pas holomorphe en z_0, par équivalence des théories de l'analyticité et de l'holomorphie. Nous sommes ainsi amenés à étudier des fonctions holomorphes sur des couronnes :

Définition 1. *Soient $0 \leq R_1 < R_2$ deux réels. La couronne $C(R_1, R_2)$ est l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par :*

$$C(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}.$$

Nous allons établir un développement en série pour une fonction holomorphe sur une couronne. Contrairement aux séries entières (et donc aux fonctions holomorphes sur un disque), les indices variront cette fois dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 1. *Soit f une fonction holomorphe sur la couronne $C(R_1, R_2)$.*

(i) il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que :

$$\forall z \in C(R_1,R_2),\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

(ii) Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{-\infty} a_n z^n$ convergent normalement sur tout compact inclus dans $C(R_1,R_2)$.

On a en fait un résultat plus précis sur les deux séries :

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R_2.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n} w^n$ ($w = \frac{1}{z}$) a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\dfrac{1}{R_1}$.

Démonstration : nous allons appliquer la formule de Cauchy sur une couronne incluse dans $C(R_1,R_2)$. Soient r_1 et r_2 deux réels tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. La fonction f étant holomorphe au voisinage de $C(r_1,r_2)$, la formule de Cauchy s'écrit :

$$\forall z \in C(r_1,r_2),\ Ind_\gamma(z)\ f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

où γ est un chemin parcourant le bord de la couronne.

En particulier, si γ_1 est le chemin parcourant le cercle $bD(0,r_1)$ dans le sens indirect, γ_2 est le chemin parcourant le cercle $bD(0,r_2)$ dans le sens direct et γ est l'union de ces deux chemins, on a :

$$\forall z \in C(r_1,r_2),\ f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw\right).$$

La fonction $z \mapsto \int_{\gamma_2} \dfrac{f(w)}{w-z}dw$ se développe en série entière (en z) et son rayon de convergence est supérieur ou égal à r_2. Ainsi en posant pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}}$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur tout compact inclus dans $D(0,r_2)$.

Considérons la fonction $z \mapsto \int_{\gamma_1} \dfrac{f(w)}{w-z}dw$. Le problème vient du fait que $|z| > R_1$. Cependant pour tout w de module r_1, on a : $\dfrac{1}{w-z} = -\dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{w}{z}}$ avec $\dfrac{|w|}{|z|} < 1$. Si on pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{-n} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_1} f(w)|w|^n$, la série $\sum a_{-n}\dfrac{1}{z^n}$ est normalement convergente (en $\dfrac{1}{z}$) sur tout compact inclus dans $\{|z| > r_1\}$, ce qui revient à dire que la série $\sum a_{-n} w^n$ ($w = \dfrac{1}{z}$) a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\dfrac{1}{r_1}$. En faisant tendre r_1 vers R_1 et r_2 vers R_2, on obtient le résultat voulu. ■

On peut noter que le problème est identique pour des couronnes dont le centre n'est pas l'origine : si z_0 est le centre de la couronne, on considère le développement de la fonction en série de Laurent en $z - z_0$.

Exemples :

1. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z-1}$ est développable en série de Laurent sur la couronne de centre 0 et de rayons 1 et 2, comme fonction holomorphe sur cette couronne. Son développement de Laurent est :

$$\forall 1 < |z| < 2,\ \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum w^n$ est 1.

2. La fonction $z \mapsto \sin(\frac{1}{z}$ est holomorphe sur la couronne $C(0, R)$ pour tout $R > 0$. Son développement en série de Laurent est donné par :

$$\forall z \in C(0, R),\ \sin(\frac{1}{z}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}}.$$

La rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}$ est infini.

Définition 2. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de D et f une fonction holomorphe sur $D \backslash \{z_0\}$. On dit que z_0 est un* **point singulier** *si f ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe sur D.*

Il en est ainsi des fonctions $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ et $z \mapsto \exp(1/z)$ en 0.

Nous avons pu observer sur ces deux exemples la différence de comportement analytique des fonctions au voisinage du point singulier. Qu'en est-il de leur développement en série de Laurent ?

Le développement de $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ ne possède qu'un terme. En revanche, partant du développement de l'exponentielle (c'est une fonction entière), on obtient, pour tout z dans $\mathbb{C} \backslash \{0\}$:

$$exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Le développement en série de Laurent admet donc une infinité de termes d'indices négatifs, ce qui motive la définition :

Définition 3. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de D et f une fonction holomorphe sur $D \backslash \{z_0\}$.*
(i) On dit que f admet un **pôle d'ordre p en** z_0 *si le plus petit indice dans son développement en série de Laurent est $-p$. L'entier p est appelé* **ordre du pôle** *et la série des termes d'indice négatif est appelée* **partie principale** *de la fonction en z_0.*
(ii) Si la série a une infinité de termes d'indices négatifs, on dit que z_0 **est un point singulier essentiel**.

La particularité de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, comparée à la fonction $z \mapsto \exp(1/z)$, est d'être le quotient de deux fonctions holomorphes. Plus généralement :

Définition 4. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est* **méromorphe sur** *D si pour tout point z_0 de D il existe un voisinage U de z_0 et deux fonctions g et h holomorphes sur U ($h \not\equiv 0$) telles que $f = \dfrac{g}{h}$ sur U.*

On a alors la caractérisation suivante des fonctions méromorphes :

Proposition 1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est méromorphe sur D si et seulement si il existe une suite $(z_n)_n$ localement finie de points de D telle que f soit holomorphe sur $D \backslash \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ et, pour tout n, z_n est un pôle de f.*

Démonstration : Supposons que f est méromorphe sur D et soit K un compact inclus dans D. D'après la définition 4, il existe un recouvrement fini $(U_j)_{j\in J}$ de K par des ouverts et deux familles $(f_j)_j$ et $(g_j)_j$ de fonctions holomorphes sur U_j, les fonctions g_j n'étant pas identiquement nulles sur U_j tels que $f = \frac{f_j}{g_j}$ sur U_j. Soit $Z(g_j)$ l'ensemble des zéros de la fonction g_j sur U_j. Pour tout z dans $Z(g_j)$ on définit m_j^z (respectivement n_j^z) le plus petit indice dans le développement en série de f_j (respectivement g_j) centré en z. On pose alors $E = \cup_{j\in J}\{z \in U_j : m_j^z < n_j^z\}$. C'est un ensemble localement fini et c'est exactement l'ensemble des pôles de f.
Réciproquement soit $(z_n)_n$ une suite localement finie de points de D telle que f soit holomorphe sur $D\backslash\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout n, z_n soit un pôle de f. Si z est un point de $D\backslash\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ il existe un voisinage de z tel que f soit holomorphe sur ce voisinage et on n'a rien à montrer. Plaçons-nous donc en un point z_n. Nous devons montrer qu'il existe un voisinage U de z_n tel que f soit le quotient de deux fonctions holomorphes sur U. Par hypothèse, il existe un voisinage U de z_n et une suite $(a_n)_{n\geq -p}$ de nombres complexes tels que :

$$\forall z \in U, \ f(z) = \sum_{k=-p}^{+\infty} a_k (z - z_n)^k.$$

La fonction $z \mapsto \sum_{k\geq 0} a_{k-p}(z - z_n)^k$ est évidemment holomorphe sur U, de même que la fonction $z \mapsto (z - z_n)^p$. L'égalité $f(z) = \dfrac{\sum_{k\geq 0} a_{k-p}(z - z_n)^k}{(z - z_n)^p}$, vraie sur U permet de conclure.
■

Nous pouvons maintenant appliquer la proposition 1 à la classification des différents types de points singuliers. Cette classification est due à Weierstrass :

Proposition 2. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de D et f une fonction holomorphe sur $D\backslash\{z_0\}$. Alors l'une des trois propositions suivantes est vérifiée :*
(i) Il existe un voisinage U de z_0 tel que f est bornée sur $U\backslash\{z_0\}$: f se prolonge holomorphiquement en z_0.
(ii) $\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} |f(z)| = +\infty$: z_0 est un pôle de f.
(iii) Il existe un voisinage U de z_0 tel que $\overline{f(U)} = \mathbb{C}$: z_0 est un point singulier essentiel.

Remarque 1.

• *Noter que dans les trois cas, il y a équivalence.*
• *La condition* (iii) *peut s'exprimer de la façon suivante : pour tout point* w *de* $\mathbb{C}$, *il existe une suite* $(w_n)_n$ *de points convergeant vers* z_0 *telle que* $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = w$.

La proposition 2 permet de reconnaître rapidement à quel type de singularité on a affaire. Pour la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, on est dans le cas (ii) : z_0 est un pôle. Pour la fonction $z \mapsto \exp(1/z)$, on n'est ni dans le cas (i), ni dans le cas (ii) : on est donc dans le cas (iii) et z_0 est un point singulier essentiel.

Les conditions "f s'étend holomorphiquement en z_0", "z_0 est un pôle" et "z_0 est un point singulier essentiel" s'excluent mutuellement d'après la définition 3. Pour démontrer la proposition 2 il suffit donc de montrer que si z_0 est un pôle alors $\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} |f(z)| = +\infty$ et si z_0 est un point singulier essentiel alors il existe un voisinage U de z_0 tel que $\overline{f(U)} = \mathbb{C}$.

Démonstration : la partie (i) a été démontrée dans le chapitre 2, cf. le théorème 6 et l'exercice 9.

(ii) : supposons que z_0 est un pôle de f. Il existe des nombres complexes $a_{-p}, ..., a_{-1}$ et une fonction g holomorphe au voisinage de z_0 tels que :

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + ... + \frac{a_{-1}}{z} + g(z)$$

localement en z_0.

Il existe donc un voisinage V de z_0 tel que $|f(z)| \geq \frac{1}{2}\dfrac{|a_{-p}|}{|z^p|}$ pour tout point z dans V, ce qui donne le résultat.

(iii) : supposons que z_0 est un point singulier essentiel de f mais qu'il existe un point w_0 de $\mathbb{C}$ et un voisinage U_0 de z_0 tel que w_0 n'appartienne pas à l'adhérence de $f(U_0)$. On peut considérer la fonction $g : z \mapsto \dfrac{1}{f(z) - w_0}$ sur U_0. Elle est holomorphe sur $U_0 \backslash \{z_0\}$, bornée au voisinage de z_0. D'après (i), elle s'étend en une fonction holomorphe en z_0. Considérons alors la fonction h définie sur U_0 par $h(z) = w - \dfrac{1}{g(z)}$. C'est une fonction méromorphe sur U_0 (quotient de deux fonctions holomorphes). D'après la proposition 1, z_0 ne peut pas être une singularité essentielle de f, ce qui contredit l'hypothèse. ■

Exemples :

1. La fonction $z \mapsto \dfrac{z}{\sin z}$ admet un prolongement holomorphe en 0 alors que la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{\sin z}$ admet un pôle d'ordre 1 en 0.

2. La fonction $z \mapsto \sin(\dfrac{1}{z})$ admet un point singulier essentiel en 0, son développement de Laurent ayant une infinité de termes d'indice négatif (voir exemple page 3).

3. Le fait que le développement de l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z-1}$ (voir exemple page 3) admette une infinité de termes d'indice négatif n'entraîne pas que 1 est un point singulier essentiel.

En effet, le développement a été fait sur une couronne centrée en 0. Il faut le faire (pour déterminer le type de la singularité 1) sur une couronne centrée en 1. Il s'écrit évidemment $\dfrac{1}{z-1}$: 1 est un pôle d'ordre 1, la partie principale de la fonction est elle-même!

4. Si φ désigne la détermination principale du logarithme complexe (voir chapitre 3), on ne peut pas s'intéresser (dans ce chapitre) à l'étude de φ en 0, ce point n'étant pas un point singulier.

En revanche, la fonction $z \mapsto \dfrac{\sin(1/z)\varphi(1+z)}{z-1}$ est méromorphe sur $D(1,1)$. La proposition 1 entraîne que 1 est un pôle. Son ordre est 1 et la partie principale de la fonction en 1 est $\dfrac{\sin 1 \;\ln 2}{z-1}$.

Le but de ce qui suit est d'établir un lien entre l'étude locale des fonctions méromorphes (détermination des pôles et calcul des résidus) et leur étude globale (intégration sur des chemins). Nous commençons par l'étude globale et établirons le lien entre les deux théories dans la partie **Théorème des résidus-Applications**.

Théorie globale

Nous allons nous concentrer dans cette partie sur l'étude globale de fonctions holomorphes. Les résultats que nous allons donner généralisent ceux obtenus dans le chapitre 2 pour des disques. Nous y avons notamment montré qu'une fonction holomorphe dans un disque y admet une primitive. Le point essentiel était de montrer que le candidat pour la primitive, défini à partir d'un chemin particulier, ne dépend pas du chemin considéré. Cette propriété est en fait une propriété sur les chemins inclus dans un disque. Nous allons travailler maintenant avec une classe particulière de domaines, sur lesquels nous pourrons montrer des propriétés identiques. Pour simplifier (la théorie qui suit est valable dans un espace topologique connexe par arcs), nous nous placerons sur $\mathbb{C}$.

Définition 5. *Soient γ_0 et $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux chemins de mêmes extrémités. On appelle homotopie de γ_0 à γ_1 une application continue h de $[0,1]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ telle que :*

$$\begin{cases} h(0,t) &=& \gamma_0(t) \\ h(1,t) &=& \gamma_1(t) \\ h(u,0) &=& \gamma_0(0)=\gamma_1(0) \\ h(u,1) &=& \gamma_0(1)=\gamma_1(1). \end{cases}$$

On dit que deux chemins γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il existe une homotopie de γ_0 à γ_1.

Proposition 3. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$. La relation "$\sim$" définie sur les chemins de D par : $\gamma_0 \sim \gamma_1$ si et seulement si il existe une homotopie de γ_0 à γ_1 est une relation d'équivalence.*

Démonstration : laissée au lecteur.

Définition 6. *Un domaine D de $\mathbb{C}$ est dit* **simplement connexe** *s'il est connexe par arcs et si deux chemins quelconques de mêmes extrémités sont homotopes.*

La définition précédente montre que sur un domaine simplement connexe, tout chemin fermé est homotope à un point.

Théorème 2. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ alors : $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.*

Démonstration : admise.

■

Corollaire 1. *Soit D un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Alors pour tout chemin γ fermé dans D on a : $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Démonstration. Un chemin fermé est homotope à un point. ■

La proposition suivante fournit des exemples de domaines simplement connexes, domaines que nous avons déjà considérés en nous intéressant au logarithme complexe :les domaines étoilés. On rappelle qu'un domaine D est étoilé par rapport à un point z_0 si pour tout point z de D, le segment $[z_0, z]$ est inclus dans D.

Exemple de domaine étoilé : le plan complexe privé d'une demi-droite. L'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ n'est pas étoilé.

Proposition 4. *Tout ouvert étoilé est simplement connexe.*

Démonstration : Soit z_0 un point de D tel que D soit étoilé par rapport à z_0 et γ un chemin fermé dans D, d'extrémités z_0. Il suffit de montrer que γ est homotope au point z_0. Pour tout u dans $[0, 1]$, la fonction $t \in [0, 1] \mapsto (1 - u)\gamma(t) + uz_0$ est à valeurs dans D : la fonction h définie de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans D par $h(u, t) = (1 - u)\gamma(t) + uz_0$ est donc une homotopie de γ à z_0. ■

Contre-exemple. Le domaine $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ n'est pas simplement connexe : si $bD(0, r)$ désigne le bord orienté du disque $D(0, r)$, la proposition 2 du chapitre 2 donne : $\displaystyle\int_{bD(0,r)} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$.

Le théorème 2 montre que l'intégrale d'une fonction holomorphe est indépendante du représentant choisi dans une classe d'équivalence pour la relation $\sim$. Cette propriété nous permet d'établir l'existence de primitives sur les domaines simplement connexes :

Théorème 3. *Soit D un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomoprhe sur D, il existe une fonction F holomorphe sur D, unique à une constante près, telle que $F' = f$ sur D.*

Ce théorème généralise la proposition 4 du chapitre 2.

Démonstration : Fixons nous un point z_0 de D. Pour tout point z de D, considérons un chemin $\gamma(z)$ allant de z_0 à z et posons : $F(z) = \int_{\gamma(z)} f(w)dw$. D'après le théorème 2, la fonction F est bien définie car ne dépend pas du chemin choisi pour aller de z_0 à z. Il nous reste à montrer que F est holomorphe sur D avec $F' = f$. Soit z un point de D et $D(a,r)$ un disque inclus dans D et contenant le point z. Si $\gamma(a)$ est un chemin reliant z_0 à a, considérons le chemin γ formé de l'union de $\gamma(a)$ et du segment $[a,z]$. Le chemin γ relie z_0 à z et donc : $F(z) = \int_\gamma f(w)dw = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)dw$. La fonction $z \mapsto \int_{[a,z]} f(w)dw$ étant holomorphe en tout point z de $D(a,r)$, de dérivée $f(z)$ d'après la proposition 4 du chapitre 2, on a le résultat voulu. ■

Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Soit D un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Alors :*

1. Si f est une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur D, il existe une fonction g holomorphe sur D telle que $\exp(g) = f$ sur D. Les autres solutions de cette équation sont alors de la forme $g + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Si f est une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur D et si n est un entier naturel non nul, il existe une fonction g holomorphe sur D telle que $g^n = f$. Les autres solutions de cette équation sont de la forme λg où λ est un nombre complexe vérifiant $\lambda^n = 1$.

Nous rappelons qu'une détermination du logarithme complexe est une fonction f, holomorphe sur un domaine D, telle que $\exp(f(z)) = z$ pour tout z dans D. En appliquant la partie 1 du corollaire précédent à la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, nous avons le résultat suivant :

Exemple : Si θ est un réel et $D_\theta = \mathbb{C}\backslash\{re^{i\theta}, r \geq 0\}$, la fonction $\varphi_\theta : z \mapsto \ln|z| + iarg_{]\theta,\theta+2\pi[}(z)$, où $arg_{]\theta,\theta+2\pi[}(z)$ est l'argument de z sur $]\theta, \theta + 2\pi[$, est une détermination du logarithme complexe sur D_θ. Les autres déterminations du logarithme complexe sur D_θ sont de la forme $\varphi_\theta + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration du corollaire. Partie 1. D'après le théorème 3, la fonction $\dfrac{f'}{f}$ admet une primitive F sur D. La fonction $f\exp(-F)$ est donc constante non nulle sur D : $f\exp(-F) = c \in \mathbb{C}$. Si $c = re^{it}$, le nombre complexe $d = \ln|c| + iarg(c)$ vérifie : $\exp(d) = c$. La fonction $g = F + d$ est solution du problème. Toute autre solution h de l'équation $\exp(h) = f$ est de dérivée égale à g' et est donc de la forme $h = g + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. La condition $\exp(\lambda) = 1$ donne $\lambda = 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Partie 2. Il suffit de considérer la fonction $\exp(g/n)$ où g est la fonction donnée dans la partie 1. ■

Théorème des résidus-Applications

I. Théorème

Considérons une fonction f holomorphe dans une couronne $C(R_1, R_2)$. D'après le théorème 1, elle y admet un développement en série de Laurent : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

La fonction $g : z \mapsto f(z) - a_{-1}z^{-1}$ est holomorphe sur $C(R_1, R_2)$ et admet la fonction G définie par $G(z) = \sum_{n \neq -1} \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ comme primitive. Ainsi, si Γ est un chemin fermé dans $C(R_1, R_2)$, la proposition 3 du chapitre 2 donne :

$$\int_\Gamma g(z)dz = 0$$

et donc :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{a_{-1}}{z} dz = 2i\pi Ind_\Gamma(0)a_{-1}.$$

En particulier, si $0 < r < r'$ et si f est holomorphe sur $D(0, r')\backslash\{0\}$, on a :

$$\int_{bD(0,r)} f(z)dz = 2i\pi a_{-1}.$$

On peut noter que si la fonction f est holomorphe sur $D(0, r')$, on retrouve la formule de la proposition 3 du chapitre 2 : a_{-1} est alors nul. Ceci reste valable en une singularité isolée z_0 quelconque de f : il existe deux réels $R_1 < R_2$ tels que la fonction f est holomorphe sur la couronne $C(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ et a pour développement $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Si γ est un chemin fermé dans $C(z_0, R_1, R_2)$, il vient :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Ind_\gamma(z_0)a_{-1}.$$

Définition 7. *Le nombre complexe a_{-1} s'appelle le résidu de f en z_0 et est noté $Res(f, z_0)$.*

Remarque 2. *On peut aussi définir $Res(f, z_0)$ comme l'unique nombre complexe λ tel que $f(z) - \dfrac{\lambda}{z - z_0}$ soit la dérivée d'une fonction holomorphe dans une couronne $C(z_0, R_1, R_2)$.*

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le lien entre les théorie locale et globale des fonctions méromorphes. Ce lien est donné par le théorème suivant, appelé théorème des résidus :

Théorème 4. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur D. Soit A un compact de D tel que le bord Γ de A détermine un chemin homotope à un point et ne contienne pas de pôle de f. Alors :*

(i) Les pôles de f dans A sont en nombre fini

(ii) Si $z_1, ..., z_k$ sont les pôles de f dans A, on a :

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{j} Res(f, z_j).$$

Démonstration. La partie (i) vient du fait que l'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe est une partie localement finie.

Partie (ii) : Soient $z_1, ..., z_k$ les pôles de f dans A. Pour tout $j \in \{1, ..., k\}$, il existe un entier N_j et des nombres complexes $a_1^j, ..., a_{N_j}^j$ tels que la fonction $z \mapsto f(z) - \sum_{p=1}^{N_j} \dfrac{a^j}{(z-z_j)^p}$ soit holomorphe sur $D \backslash \{z_1, ..., z_{j-1}, z_{j+1}, ..., z_k\}$. La fonction $g : z \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{p=1}^{N_j} \dfrac{a^j}{(z-z_j)^p} \right)$ est donc holomorphe sur D. D'après le théorème ?, on obtient :

$$\int_\gamma g(z)dz = 0.$$

Cependant, la fonction $z \mapsto \sum_{p=2}^{N_j} \dfrac{a^j}{(z-z_j)^p}$ admettant une primitive sur D, son intégrale le long de γ est nulle et donc :

$$\int_\gamma \sum_{p=1}^{N_j} \frac{a^j}{(z-z_j)^p} dz = 2i\pi Ind_\gamma(z_j)a_1 = 2i\pi Ind_\gamma(z_j) Res(f, z_j).$$

■

Le théorème 4 permet de compter les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe :

Corollaire 3. *Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, A un compact de D et a un nombre complexe. On suppose que le bord orienté γ de A définit un chemin homotope à un point et ne contient ni des pôles de f ni des zéros de la fonction $f_a : z \mapsto f(z) - a$. Alors :*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi(P - Q)$$

où P est le nombre de zéros de f_a dans A comptés avec leur ordre de multiplicité et Q est le nombre de pôles de f dans A comptés avec leur ordre.

Remarque 3. *Le cas particulier du corollaire 3 où la fonction f est holomorphe sur D et $a = 0$ est connu sous le nom de* **formule de Rouché**.

Démonstration du corollaire. Soient $z_1, ..., z_k$ les zéros de la fonctions f_a, de multiplicité $\alpha_1, ..., \alpha_k$, et $z_{k+1}, ..., z_p$ les pôles de la fonction f, de multiplicité $\beta_{k+1}, ..., \beta_p$. Si g est la fonction $\dfrac{f'}{f-a}$, le théorème des résidus donne : $\int_\gamma g(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{k} Res(g, z_j)$.

Localement en z_j $(j = 1, ..., k)$: il existe une fonction holomorphe g_j ne s'annulant pas telle que : $f(z) - a = (z - a)^{\beta_j} g_j(z)$. Il vient alors : $\dfrac{f'(z)}{f(z) - a} = \dfrac{\alpha_j}{z - a_j} + \dfrac{g_j'(z)}{g_j(z)}$ et donc : $Res(g, z_j) = \alpha_j$.

Localement en z_j $(j = k + 1, ..., p)$: il existe une fonction holomorphe g_j ne s'annulant pas telle que $f(z) = \dfrac{g_j(z)}{(z - z_j)^{\beta_j}}$. Ainsi : $\dfrac{f'(z)}{f(z) - a} = \dfrac{g_j'(z)}{g_j(z) - a(z - z_j)^{\beta_j}} - \dfrac{1}{z - z_j} \dfrac{\beta_j g_j(z)}{g_j(z) - a(z - z_j)^{\beta_j}}$.

La fonction $\dfrac{g_j'}{g_j - a}$ étant holomorphe, on a : $Res(g, z_j) = -\beta_j$.

Finalement :

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = 2i\pi\Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j - \sum_{j=k+1}^{p} \beta_j\Big).$$

■

II. Application de la formule des résidus au calcul d'intégrales.

Le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}$, où n est un entier naturel pair quelconque, n'est pas des plus aisé par les méthodes usuelles.

Considérons la fonction méromorphe $f : z \mapsto \frac{1}{1+z^{2n}}$. Elle n'a pas de pôle sur le chemin Γ_R, union de l'intervalle réel $[-R, R]$ et du chemin γ_R défini par : $\gamma_R(t) = R\exp(it)$, $t \in [0, \pi]$. Le chemin Γ_R est le bord orienté du demi-disque supérieur.

Les pôles de f dans ce demi-disque sont : $z_k = \exp(i\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in \{0, ..., n - 1\}$. Le résidu de f en z_k est : $Res(f, z_k) = \dfrac{1}{f'(z_k)} = -\dfrac{1}{2n} \exp(-i\dfrac{(2k + 1)\pi}{2n})$. Ainsi d'après la formule des résidus :

(1) $$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-i\frac{(2k + 1)\pi}{2n}) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \sin\left(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}\right).$$

De plus :

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1 + z^{2n}}\right| \leq \frac{\pi R}{R^{2n} - 1}$$

cette dernière quantité tendant vers 0 quand R tend vers l'infini.

L'égalité

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}.$$

assure, en passant à la limite quand R tend vers l'infini dans l'équation (1) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=-\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n/2-1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

Le théorème des résidus nous a permis de calculer facilement une intégrale généralisée. Nous avons pour cela intégré une fonction méromorphe sur un chemin ne contenant pas les pôles de la fonction. Pour prouver que l'intégrale sur le chemin γ_R tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini, nous avons utilisé la condition $\lim_{|z|\to\infty} zf(z)=0$.

Dans ce qui suit, nous allons calculer des intégrales généralisées à partir du théorème des résidus : il nous faudra contrôler le comportemant de l'intégrale sur certains chemins. Nous obtiendrons ce contrôle grâce au lemme suivant :

Lemme 1. *Soit f une fonction continue définie sur un secteur fermé centré à l'origine , d'angle compris entre θ_1 et θ_2. On note S_R l'arc de rayon R inclus dans le secteur. On a :*
(i) Si $\lim_{|z|\to\infty} zf(z)=0$, *alors* $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz=0$.
(ii) Si $\lim_{|z|\to 0} zf(z)=0$, *alors* $\lim_{R\to 0}\int_{S_R} f(z)dz=0$.
(iii) Si $0\le\theta_1<\theta_2\le\pi$ *et si* $\lim_{|z|\to\infty} f(z)=0$, *alors* $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)\exp(i\lambda z)dz=0$ *pour tout* $\lambda>0$.

Noter que dans la partie (iii) le cas $\lambda<0$ donne : $\lim_{R\to\infty}\int_{S'_R} f(z)\exp(i\lambda z)dz=0$ où S'_R est le secteur délimité par $-\theta_2$ et $-\theta_1$.

Démonstration.
Parties $(i)-(ii)$: $\left|\int_{S_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{it})iRe^{it}dt\right| \le R|\theta_2-\theta_1|\sup_{z\in S_R}|f(z)|$. Or par hypothèse la quantité $R\sup_{z\in S_R}|f(z)|$ tend vers 0 lorsque R tend vers 0 ou $+\infty$.

Partie (iii) : $\left|\int_{S_R} f(z)\exp(iz)dz\right| \le \sup_{S_R}|f|\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-R\sin t}Rdt.$
Supposons $\theta_1\le\pi-\theta_2$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{S_R} f(z)\exp(iz)dz\right| &\leq \sup_{S_R}|f|\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} e^{-R\sin t}Rdt \\
&\leq 2\sup_{S_R}|f|\int_{\theta_1}^{\pi/2} e^{-R\sin t}Rdt \\
&\leq 2\sup_{S_R}|f|\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} e^{-2Rt/\pi}Rdt \\
&\leq \pi\sup_{S_R}|f|(e^{-2R\theta_1/\pi}-e^{-R}).
\end{aligned}$$

La condition : $\lim_{R\to\infty}\sup_{S_R}|f| = 0$ nous donne le résultat. ■

Ce lemme permet de calculer (lorsqu'elles existent!) les intégrales généralisées de fonctions rationnelles.

<u>Méthode de calcul</u>

Dans toute cette partie, f désignera une fonction rationnelle sans pôle réel.

<u>**A**. Calcul de $I = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt$.</u>

Il n'y a pas de problème d'existence de I, la fonction étant continue sur $[0, 2\pi]$. En posant $z = e^{it}$, on a : $I = \displaystyle\int_\gamma f(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i})\frac{dz}{iz}$ où γ est le bord orienté du disque unité. Si z est sur γ, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ et donc :

$$I = \frac{1}{i}\int_\gamma f(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))\frac{dz}{z}.$$

Soit g la fonction rationnelle : $z \mapsto \dfrac{1}{z}f(\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z}), \dfrac{1}{2i}(z-\dfrac{1}{z}))$. Si $z_1, ..., z_k$ sont les pôles de g sur $D(0,1)$, le théorème des résidus donne :

$$I = \sum_{j=1}^{k} Res(g, z_j).$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{2+\cos t}dt$.

<u>**B**. Calcul de $J = \int_{\mathbb{R}} R(t)dt$.</u>

Nous supposons évidemment ici que la fonction rationnelle f est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne : $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$.

Ce cas se traite de manière identique au calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^{2n}}$.

Etendons la fonction f à $\mathbb{C}$ et choisissons un réel positif R tel que les pôles de f soient dans le disque $D(0,R)$. Si Γ_R est l'union de l'intervalle $[-R,R]$ et du chemin γ_R défini par : $\gamma_R(t) = e^{it},\ t \in [0,\pi]$, le théorème des résidus, associé à la partie (i) du lemme ? , nous donne :

$$J = 2i\pi \sum_{\substack{Imz>0 \\ z \text{ pôle de } f}} Res(f,z).$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{t+1}{(t^2+1)^2(t^2+3)}dt.$

C. Calcul de $K = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

On peut sans perte de généralité supposer que λ est strictemet positif. Etendons la fonction rationnelle f à $\mathbb{C}$ et considérons l'intégrale $\int_{\Gamma_R} f(z)\exp(i\lambda z)dz$ où Γ_R est le chemin défini dans la partie B. La fonction rationnelle f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement : $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$. La partie (iii) du lemme nous donne alors :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)\exp(i\lambda z)dz = 0$$

où $S_R = \{z \in \mathbb{C}, Imz > 0, |z| = R\}$.

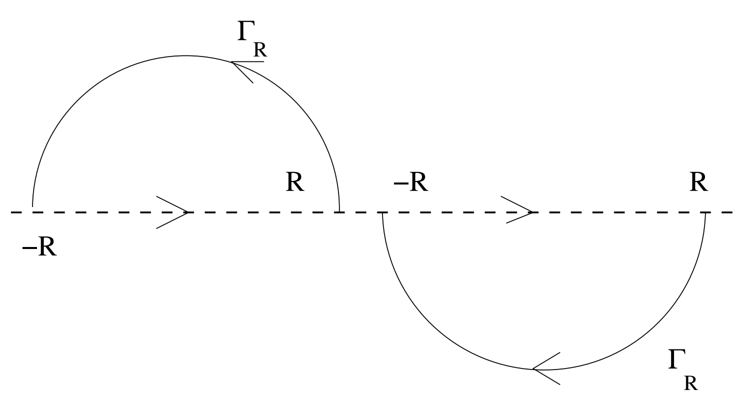
Finalement, en considérant la fonction $g : z \mapsto f(z)\exp(i\lambda z)$, le théorème des résidus donne :

$$K = 2i\pi \sum_{\substack{Imz>0 \\ z \text{ pôle de } g}} Res(g,z).$$

De même, si λ est négatif, on n'intègre non plus sur le demi-cercle positif mais sur le demi-cercle négatif. On obtient alors :

$$K = -2i\pi \sum_{\substack{Imz<0 \\ z \text{ pôle de } g}} Res(g,z).$$

Le signe "-" vient du sens de parcours du chemin d'intégration, comme l'explique le schéma suivant :



Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos \pi t}{t^2+2} dt.$

Exercices du chapitre 4

Exercice 1 :

1. Démontrer la convergence de $s(z) = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{z+n} - \dfrac{1}{n} \right)$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

2. Calculer la dérivée de s.

3. Démontrer que $s(z) = \text{cotan}(\pi z)$.

Exercice 2 :

1. Déterminer le développement en série entière de $f(z) = \dfrac{z}{1+z+z^2}$ près de 0.

2. Donner le rayon de convergence de la série obtenue.

3. La fonction f est-elle méromorphe ? Si oui, préciser les pôles et donner le développement de Laurent en ces pôles. Ordre. Partie principale.

Exercice 3 : Si n est un entier quelconque, déterminer la nature du point singulier 1 de la fonction $z \mapsto \dfrac{\exp(\frac{1}{z-1})}{(z-1)^n}$.

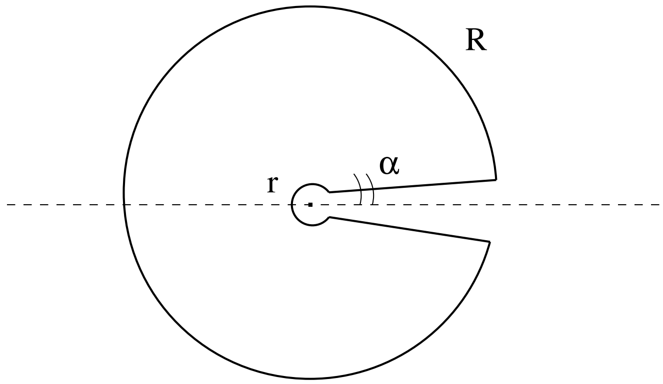
Exercice 4 : Calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2+\cos t}dt, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{t+1}{(t^2+1)^2 t^2+3)}dt, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \pi t}{t^2+2}dt.$

Exercice 5 : En se ramenant à la détermination principale du logarithme complexe, montrer que la fonction φ_θ définie sur le domaine $D_\theta = \mathbb{C}\backslash\{re^{it}, r \geq 0\}$ par $\varphi_\theta(z) = \ln|z| + i \arg_{]\theta,\theta+2\pi[}(z)$ est une détermination du logarithme complexe.

Exercice 6 : a. Déterminer l'ensemble des réels p tels que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$ converge.

b. Déterminer $Res(f, -1)$ où $f : z \mapsto \dfrac{t^{p-1}}{1+t}$.

c. En considérant le chemin $\gamma(r, R, \alpha)$ défini par :



Montrer que : $2i\pi Res(f,-1) = (1 - e^{2i\pi(p-1)})I$.

En déduire la valeur de I.