CYCLICITÉ ET BICYCLICITÉ DANS LES ESPACES ℓ^p ET ℓ^p À POIDS

FLORIAN LE MANACH

Abstract. L'exposé se consacrera à l'étude de la cyclicité et la bicyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids et à l'étude de la cyclicité dans les espaces de Dirichlet. Alors que Wiener a caractérisé la bicyclicité des vecteurs de $\ell^1(\mathbb{Z})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ grâce à l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier, Lev et Olevski ont démontré que cet ensemble ne peut caractériser la bicyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ lorsque $1 < p < 2$ pour des suites $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Beurling, Salem et Newman se sont aussi intéressés à la bicyclicité de vecteurs de $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour $1 < p < 2$. L'exposé présentera des résultats qui étendent les résultats de Beurling, Salem et Newman aux espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids, en étudiant la dimension de Hausdorff et la capacité de l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier. Ensuite il sera vu que le résultat de Lev-Olevskii reste valide pour la cyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 < p < 2$. De plus, des conditions suffisantes à la cyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids seront donnés. Enfin il sera montré que, pour une fonction f appartenant à l'algèbre du disque et à un espace de type Dirichlet, si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f est réduit à un point alors f est cyclique. Ceci généralise le résultat de Hedenmalm et Shields qui ont traité le cas du Dirichlet classique.

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est cyclique (resp. bicyclcique) si le sous-espace engendré par

$$\Big\{(u_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{N}\Big\} \quad \Big(\text{resp. } \Big\{(u_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{Z}\Big\}\Big)$$

est dense dans $\ell^p(\mathbb{Z})$.

References

[1] A. Beurling, *On a closure problem*, Ark. Mat. 1 (1951), 301–303.
[2] N. Lev, A. Olevskii, *Wiener's 'closure of translates' problem and Piatetski-Shapiro's uniqueness phenomenon*, Ann. of Math. (2) 174 (2011), no. 1, 519–541.
[3] D. J. Newman, *The closure of translates in ℓ^p*, Amer. J. Math. 86 (1964), pp. 651–667
[4] N. Wiener, *Tauberian theorems*, Ann. of Math. (2) 33 (1932), no. 1, 1–100.
[5] Karim Kellay, Florian Le Manach, Mohamed Zarrabi, *Cyclicity in Dirichlet type spaces*, Complex Analysis and Spectral Theory. 181–193, Contemp. Math., 743, Amer. Math. Soc., Providence, May 2018