Université de Bordeaux
MA3002, Analyse 2

2013-14.

# Correction du DST du 06/01/2014.

## Exo. 1

1) (Questions du cours). Soit $\mathcal{O}$ un domaine (= un ouvert connexe), $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x^\circ \in \mathcal{O}$. La dérivée partielle par rapport à $x_i$ (ou bien $e^i$, le vecteur de la base standard), $i = 1, \dots d$, est définie comme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^\circ) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^\circ + te^i) - f(x^\circ)}{t}.$$

L'existence des dérivées partielles en un point n'implique ni la continuité de l'application en ce point, ni dérivabilité (= la différentiabilité).

Exemple: soit $z = (x,y)$

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Posons $z^\circ = 0 = (0,0)$. Il est facile de vérifier que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Pourtant, la fonction $f$ n'est pas continue au pt. $z^\circ = 0$ (vérifiez-le!). Comme chaque application différentiable en un point doit y être continue, elle n'y est pas différentiable non plus.

---

2). Soit $f : \underset{\subset \mathbb{R}^d}{O} \longrightarrow \mathbb{R}$, comme ci-dessus.
Si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,d$, existent et sont continues sur $O$, alors $f$ est de classe $C^1$ sur $O$
(en formule : $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(O),\ i=1,\dots,d\right) \Longrightarrow f \in C^1(O)\right)$.

---

3). Soit maintenant

$$g(z) = g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+4y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq 0. \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que $g \in C(\mathbb{R}^2)$.

- Il est clair que $g \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. En effet, $g$ s'écrit sous la forme $g(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{\sqrt{Q(x,y)}}$,

où $P(x,y)$, $Q(x,y) (\geq 0)$ sont polynômes (et donc continus). Notons que $Q(x,y) \neq 0$ pour $(x,y) \neq 0$. Donc $g(x,y)$ est continue comme composée des applications continues (résultat du cours).

- Il reste à vérifier la continuité au pt. $z^0 = 0 = (0,0)$, c.à.d. :

$\lim\limits_{z \to 0} g(z) = 0$ (?). Pour $\|z\| \to 0$, on a

$$0 \le |g(z)| \underset{z=(x,y)}{=} \left| \frac{3x^2+4y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{3x^2+4y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{4(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{4\|z\|^2}{\|z\|} = 4\|z\| \to 0,$$

d'où la conclusion.

b). Calculons les dérivées partielles de $g$ au pt $z^\circ = 0 = (0,0)$. On a:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{x|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{|x|} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \begin{cases} 3, & x \geq 0 \\ -3, & x \leq 0 \end{cases}$$ – la limite (et donc $\frac{\partial g}{\partial x}(0)$) n'existent pas.

D'une manière similaire:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \begin{cases} \frac{4y}{|y|} = 4, & y \geq 0 \\ \frac{4y}{|y|} = -4, & y < 0 \end{cases}$$ –

– la limite (et $\frac{\partial g}{\partial y}(0)$) n'existent pas.

Comme la différentiabilité de l'application en un point implique l'existence des dérivées partielles en ce point, par contraposée on constate que $g$ n'est pas différentiable en pt. $z^\circ = 0$.

4). Soit

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3+3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0.\end{cases}$$

a) Les explications d'Exo. 1, 3, a) montrent que $h$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ comme composée d'applications différentiables (et avec le dénominateur $\neq 0$). Calculons ses dérivées partielles: $(x,y)\neq 0$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{12x^2\cdot\sqrt{x^2+y^2}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(4x^3+3y^3)}{(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{12x^2(x^2+y^2)-x(4x^3+3y^3)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{8x^4+12x^2y^2-3xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{9y^2\cdot\sqrt{x^2+y^2}-\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(4x^3+3y^3)}{(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{9y^2(x^2+y^2)-y(4x^3+3y^3)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{9y^2x^2-4yx^3+6y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

La différentielle en question est

$$\mathcal{D}h(x,y)\cdot\begin{bmatrix}l\\k\end{bmatrix}=\frac{\partial h}{\partial x}\cdot l+\frac{\partial h}{\partial y}\cdot k=\left(\frac{8x^4+12x^2y^2-3xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\cdot l+$$

$$+\left(\frac{9y^2x^2-4yx^3+6y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\cdot k.$$

b). Raisonnons comme ds le Exo. 1, 3, b):

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x,0)-h(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{x\cdot|x|} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0) = \lim_{y\to 0} \frac{h(0,y)-h(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{3y^3}{y\cdot|y|} = 0.$$

Notons que

$*1)$ $\lim\limits_{z=(x,y)\to 0} \frac{\partial h}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial x}(0) = 0$

$*2)$ $\lim\limits_{z=(x,y)\to 0} \frac{\partial h}{\partial y}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$

Ces deux relations démontrées, nous verrons que $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$ sont continues au pt. $0=(0,0)$ et, par (l'Exo. 1, 2), l'application $h$ y est de classe $C^1$ (et donc différentiable). Démontrons $*1)$ (la démo de $*2)$ est similaire): observons que $|x| \le \|z\|$, $|y| \le \|z\|$, où $z=(x,y)$. Alors, pour $z=(x,y)\to 0$ (ou, d'une manière équivalente, $\|z\|\to 0$), on a:

$$0 \le \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| \le \frac{8|x|^4 + 12|x|^2|y|^2 + 3|x||y|^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \le$$

$$\le \frac{8\|z\|^4 + 12\|z\|^4 + 3\|z\|^4}{\|z\|^3} = \frac{23\|z\|^4}{\|z\|^3} = 23\|z\| \to 0,$$

et $*1)$ est démontré.

c). Il découle de (l'Exo. 1, 4, a) que $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ sont des composées des fonctions continues (avec le dénominateur $\neq 0$) pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Par conséquent, $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ y sont continues et donc, par (l'Exo. 1, 2), $h$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. La continuité des dérivées partielles au pt. $0$ est démontrée ds la question précédente. La conclusion est donc que $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

---

d). On formule le théorème de Clairaut-Schwarz pour l'ordre des dérivées partielles $n=2$; on peut le donner pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire. Donc:

<u>Théorème</u> Soit $f : \underset{\subset \mathbb{R}^d}{O} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $O$, et les dérivées partielles d'ordre 2 $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} ; i,j = 1,\dots,d \right)$ existent. Si les dérivées partielles sont continues, elle ne dépendent pas de l'ordre de dérivation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad , \quad \forall x \in O.$$

---

e). Pour $z = (x,y) \neq 0$ on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left( \frac{8x^4 + 12x^2y^2 - 3xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{(24x^2y - 9xy^2)\cdot(x^2+y^2)^{3/2} - \frac{3}{\cancel{4}}(x^2+y^2)^{1/2}\cdot\cancel{4}y\cdot}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{(8x^4+12x^2y^2-3xy^3)}{} = \frac{\cancel{(x^2+y^2)^{1/2}}((24x^2y-9xy^2)(x^2+y^2) -}{(x^2+y^2)^{\cancel{3}\,5/2}}$$

$$\frac{-3y(8x^4+12x^2y^2-3xy^3)))}{} = -\frac{(12x^2y^3+9x^3y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} \quad *3)$$

D'une manière similaire, on obtient pour

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9y^2x^2-4yx^3+6y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{(18y^2x-12yx^2)\cdot(x^2+y^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2)^{1/2}x\cdot}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\cdot(9y^2x^2-4yx^3+6y^4)}{} = \ldots = -\frac{(9y^2x^3+12y^3x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}} \quad *4)$$

Nous constatons que $\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (car composées des fonctions continues avec le dénominateur $\neq 0$), et donc le th. de Clairaut-Schwarz est applicable; les dérivées partielles sont donc égales (ce qui est confirmé par les résultats de calculs $*3) - *4)$).

Etudions la continuité des dérivées $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ au pt. $z^0=0$. On a :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial h}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)(0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0.$$

On constate pourtant que la $\lim\limits_{\substack{z=(x,y)\to 0\\ z\neq 0}} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(z)$ (selon *4) (ainsi que $\lim\limits_{\substack{z=(x,y)\to 0\\ z\neq 0}} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(z)$, selon *3)). n'existent pas (pour cela, il suffit de considérer la limite le long des droites $y=\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$). Donc ces dérivées partielles d'ordre 2 ne sont pas continues au pt. $z^0$ et le thm. de Clairaut-Schwarz ne s'y applique pas.

## Exo. 2

Soit

$$V(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y} \; ; \; u(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z.$$

1) Considérons d'abord la fonction $V(x,y)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x \cdot e^{x-y} + e^{x-y} \cdot (x^2 - 2y^2) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -4y e^{x-y} - e^{x-y} \cdot (x^2 - 2y^2) = -e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4y)$$

Le système d'équations pour les pts critiques est :

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) = 0 \\ -e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 4y = 0. \end{cases}$$

Les solutions sont $(0,0)$, $(-4,-2)$.

Calculons la matrice hessienne:

$$H(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - 2y^2 + 4x + 2, & -(x^2 - 2y^2 + 2x + 4y) \\ -(x^2 - 2y^2 + 4y + 2x), & x^2 - 2y^2 + 8y - 4 \end{bmatrix} \times e^{x-y}.$$

On a:

- $H(V)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ — la matrice est de signe indéfinie et donc $(0,0)$ est le pt. selle.

- $H(V)(-4,-2) = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} \cdot e^{-2} \leq 0$ — la matrice est strictement négative et

donc le pt. $(-4,-2)$ est le pt. de max. local.

Considérons maintenant $u(x,y,z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6y \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x \; ; \; \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 4.$$

Les équations pour les pts. critiques se lisent donc :

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 2y + 6x = 0 \\ 2z - 4 = 0 \end{cases} \longrightarrow z = 2.$$

On constate que les solutions sont $(0,0,2)$ et $(6,-18,2)$. Considérons la matrice hessienne :

$$H(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour le signe :

- $H(u)(0,0,2) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ – la matrice est de signe indéfini et $(0,0,2)$ est le pt. selle.

- $H(u)(6,-18,2) = \begin{bmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \geq 0$ – la matrice est strictement positive et il s'agit de point de min. local.

2). Les extréma trouvés sont locaux, mais pas globaux : en effet

- pour $V(x,y)$ on a $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} V(x,y) = -\infty \left(\begin{matrix} \text{posez} \\ x = 0 \\ y \to -\infty \end{matrix}\right).$

$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} v(x,y) = +\infty$. $\left(\begin{array}{l} \text{posey } y=0 \\ x \to +\infty \end{array}\right)$. (1.

- pour $u(x,y,z)$ : $\inf_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} u(x,y,z) = -\infty$.

$\left(\begin{array}{l} \text{posey } y,z=0, \\ x \to -\infty \end{array}\right)$.

$\sup_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} u(x,y,z) = +\infty$.

$\left(\begin{array}{l} \text{posey } y,z=0 \\ x \to +\infty \end{array}\right)$.

---

## Exo. 3

1) La solution est par la linéarité de l'équation (E) :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_1+u_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1+u_2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2 - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0+0=0.$$

2). En effet, on a ( $f'(s)$ désigne la dérivée "habituelle" d'une fonction d'une variable):

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(f''(x-t) + f''(x+t)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(f''(x-t) + f''(x+t)\right),$$

d'où $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0$.

Posons $t=0$ : $u_1(x,t)\big|_{t=0} = u_1(x,0) = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(x)\right) = f(x)$.

Pareillement, pour $t=0$ et $\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(-f'(x-t) + f'(x+t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(-f'(x) + f'(x)\right) = 0$.

3) Soit $u_2(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$

Posons $F(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$, avec un $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire fixé.

Alors $u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(x+t) - F(x-t)\right)$

On vérifie alors que $u_2(x,t)$ satisfait l'équation (E) comme ds la question précédente. Il reste de vérifier les valeurs initiales pour cette solution.

$$u_2(x,0) = u_2(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_x^x g(s)\,ds \underset{\text{ou bien.}}{=} \frac{1}{2}\left(F(x) - F(x)\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(F'(x+t) + F'(x-t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= F'(x) = g(x)$$

4) Ceci est évident d'après les questions 1, 2, 3.

---

<u>Exo. 4.</u> Pour la longueur de la courbe $\gamma$, donnée par $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$, on a :

$$L(\gamma) = \text{la longueur de } \gamma = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt.$$

Appliquons cette formule :

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\sin t)^2 + 1}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cancel{2t\cos t\sin t} + t^2\cos^2 t + \cos^2 t - \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\sin^2 t + 1}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2 + t^2}\,dt,$$

et l'intégrale se calcule ~~par un~~ trivialement changement de variable hyperbolique.