TMF704U M1 Analyse Complexe

Devoir maison No. 1 à rendre pour le 24 octobre

`Stanislas.Kupin@math.u-bordeaux.fr`,
`philippe.thieullen@u-bordeaux.fr`

Les exercices suivants sont indépendants. Les chemins donnés sont parcourus dans le sens positif.

Exercice 1. (Questions du cours) Soit $O \subset \mathbb{C}$ un domaine.

(i) Donner la définition d'une fonction f holomorphe sur O.

(ii) Enoncer et démontrer les équations de Cauchy-Riemann pour f.

(iii) Soit $O = D(a, r),\ r > 0$. Démontrer que la fonction $f(z)$ est holomorphe sur O si et seulement si $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ y est holomorphe aussi.

Exercice 2. On note par L_α la demie droite orientée $y = \tan(\alpha)x$ où $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$. En utilisant le théorème de Cauchy et en admettant $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$, montrer

$$\int_{L_\alpha} \exp(-z^2)\, dz = \sqrt{\pi}.$$

Calculer les intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{2}\right) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} \sin\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{2}\right) dx.$$

Exercice 3. Soient a, b deux réels strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions holomorphes f définies sur $\mathbb{C}$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad a\Re(f(z))^2 + b\Im(f(z))^2 = 1,$$

($\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont les parties réelles et imaginaires de z).

Exercice 4. Calculez les intégrales suivantes à l'aide du théorème de Cauchy :

$$\int_{\partial D(0,2)} \frac{z^3 + 2}{z^2 - 2z - 3}\, dz, \quad \int_{\partial D(0,2)} \frac{z^3 + 2}{(z-1)^3(z+4)}\, dz.$$

Exercice 5. On considère deux points distincts z_1, z_2 du plan complexe $\mathbb{C}$, distincts de l'origine, et deux nombres complexes a_1, a_2 quelconques.

(i) Enoncer le théorème de Liouville.

(ii) Déterminer toutes les fonctions holomorphes f sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ vérifiant les conditions suivantes :

(ii-a) $\lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = a_1$,

(ii-b) $\lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = a_2$,

(ii-c) $\lim_{z \to +\infty} f(z)/z = 1$.

Indication : *On utilisera le résultat du cours suivant : si f est une fonction holomorphe dans un disque pointé en zéro $\mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$ et vérifie $\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$, alors f est la restriction au disque pointé d'une fonction holomorphe définie sur le disque tout entier.*

Exercice 6. Décrire toutes les fonctions $f \in Hol(D(0, 2))$ telles que

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}, \quad f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}.$$