ANNEE UNIVERSITAIRE 2018 / 2019
S6 Semestre de Printemps
Epreuve : Analyse fonctionnelle
Date : 2019
Heure : Durée : 1h30
Lieu :
Documents : non autorisés
Epreuve de M. : Sueur
Surveillants :
Collège Sciences et technologies

Exercice 1 (sur 4 points)

Soit X un ensemble non vide. On considère $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tel que $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

a) Montrer que d est une distance.

b) Montrer que tout sous-ensemble de X est ouvert.

Correction

a) L'application d est bien à valeurs positives, vérifie $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, et $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout x et pour tout y. Enfin pour x, y, $z \in X$, on a bien $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ car soit $x = y$ et alors $0 \leqslant d(x, z) + d(y, z)$, soit $x \neq y$ et alors z est différent d'au moins un des deux, ce qui assure que $d(x,z) + d(y,z) \geqslant 1$.

b) Pour tout sous-ensemble A de X, pour tout a dans A, la boule de centre a et de rayon $1/2$ coïncide avec $\{a\}$ et est donc bien inclus dans A.

Exercice 2 (sur 7 points)

a) Enoncer le théorème de point fixe de Banach-Picard pour les applications contractantes.

b) Donner deux exemples d'applications contractantes dans un espace de dimension infinie.

c) Donner la preuve du théorème de point fixe de Banach-Picard pour les applications contractantes.

Correction

On renvoie au cours pour l'énoncé et la preuve du théorème de point fixe de Banach-Picard pour les applications contractantes.

Les applications

$$T_1 : f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2} f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \tag{1}$$

et

$$T_2 : f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \mapsto \frac{19}{20} f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \tag{2}$$

sont deux exemples d'applications contractantes dans un espace de dimension infinie.

Exercice 3 (sur 3 points)

Donner la définition d'une famille de fonctions équicontinues. Donner deux exemples.

Correction

On renvoie au cours pour la définition d'une famille de fonctions équicontinues. Un premier exemple de famille de fonctions équicontinues est donné par un singleton de fonction continue.

De plus si l'on note $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ la fonction donnée par $f(x) = x$ alors la famille $\{f, \frac{1}{2}f\}$ est équicontinue.

Exercice 4 (sur 6 points)

Dans cet exercice on note H l'espace de Banach $C^0([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme

$$\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On note V l'application qui à chaque f dans H associe la fonction Vf de H définie pour $x \in [0,1]$ par

$$Vf(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que V est linéaire et continu de H dans H.
2. On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ bornée dans H. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $(Vf_n)_n$.

Correction

1. On considère deux fonctions f et g de H, deux nombres réels a et b. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} V(af+bg)(x) &= \int_0^x (af+bg)(t)dt \\ &= a\int_0^x f(t)dt + b\int_0^x g(t)dt \\ &= aV(f)(x) + bV(g)(x). \end{aligned}$$

Donc V est linéaire.

De plus, pour chaque $x \in [0,1]$,

$$|Vf(x)| \leqslant \int_0^x |f(t)|dt \leqslant \int_0^x \|f\|dt \leqslant \int_0^1 \|f\|dt = \|f\|.$$

Par conséquent, $\|Vf\| \leqslant \|f\|$ ce qui implique que V est continu de H dans H.

2. Comme la suite $(f_n)_n$ est bornée dans H et que V est continue, on déduit que la suite $(Vf_n)_n$ est bornée dans H. Elle est donc en particulier ponctuellement bornée. De plus, pour tout n, la dérivée de Vf_n est f_n, donc la suite des dérivées des fonctions $(Vf_n)_n$ est bornée dans H. Ainsi la suite $(Vf_n)_n$ est équi-continue. L'espace de d'épart de ces fonctions est l'intervalle $[0, 1]$ qui est compact et l'espace d'arrivée est complet. Ainsi le Théorème d'Ascoli peut s'appliquer. On obtient ainsi que la suite $(Vf_n)_n$ est relativement compacte, c'est-à-dire que l'on peut en extraire une sous-suite convergente.