TGM601 2019

Correction de quelques exercices sur la compacité.

Exo. 11, TD2, quest. b).

Soit
$$\Pi = \{ x = (x_1, \dots x_n, \dots) : |x_n| \leq \frac{1}{n}, \forall n \} \subset \ell^2.$$

Montrons que cet ensemble est compact; nous allons le faire en montrant que $\forall \varepsilon > 0$ il existe un ε-réseau pour Π (i.e., $\exists y^1, \dots y^N \in \ell^2 : \Pi \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(y^k, \varepsilon)$).

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et fixé. Alors il y a $M \in \mathbb{N}$

(1) t.q. $\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2$ (par la déf. de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$). Pour $x = (x_1, \dots x_n, \dots) \in \ell^2$, notons par P_M son projeté sur $\mathbb{R}^M$, i.e.

$$P_M : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}^M$$
$$x = (x_n) \longrightarrow P_M x = (x_1, \dots x_M, \underbrace{0, \dots 0, \dots}_{\substack{\text{à partir du rang } M+1, \\ x_n = 0,\ n \geq M+1}}).$$

Posons $\Pi_M = P_M \Pi = \{ x = (x_1, \dots x_M, 0, \dots 0, \dots), |x_n| \leq \frac{1}{n}, n \leq M \}$.

Comme $\Pi_M \subset \mathbb{R}^M$, on peut appliquer les conditions de la compacité dans l'espace de dim. finie; en particulier Π_M est borné et fermé et donc compact.

Par conséquent, il admet un ε-réseau, c.à.d

$\exists\, y^1, \dots y^N \subset \mathbb{R}^M$, chaque y^k, $k=1,\dots N$

est de forme

$$y^k = (y^k_1, \dots y^k_M, 0, \dots 0, \dots) \text{ et}$$

$$\Pi_M \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_{\mathbb{R}^M}(y^k, \varepsilon).$$

On affirme maintenant que $\Pi \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_{l^2}(y^k, \varepsilon\sqrt{2})$.

En effet : soit $x \in \Pi$; alors $P_M x \in P_M \Pi$ et donc

$\exists\, y^{k_0}$, $k_0 = 1, \dots N$ t.q.

$$(2) \qquad \| P_M x - y^{k_0} \|^2_{2, \mathbb{R}^M} = \sum_{n=1}^{M} |x_n - y^{k_0}_n|^2 < \varepsilon^2$$

(ceci veut dire que $P_M x \in B_{\mathbb{R}^M}(y^{k_0}, \varepsilon)$).

Maintenant,

$$\|x - y^{k_0}\|_2^2 = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n^{k_0}|^2}_{\text{norme de } l^2} = \sum_{n=1}^{M} |x_n - y_n^{k_0}|^2 +$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} |\underbrace{x_n}_{|x_n| \le \frac{1}{n}} - \underbrace{y_n^{k_0}}_{=0}|^2 \le \sum_{n=1}^{M} |x_n - y_n^{k_0}|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \underset{(1),(2)}{<} \varepsilon^2 + \varepsilon^2 =$$

$$= 2\varepsilon^2.$$

On a $\|x - y^{k_0}\|_2 < \varepsilon\sqrt{2}$, ou bien $x \in B_{l^2}(y^{k_0}, \varepsilon\sqrt{2})$.

Comme cela marche pour tout $x \in \Pi$, on a

$\Pi \subset \bigcup\limits_{k=1}^{M} B(y^k, \varepsilon\sqrt{2})$, on a $\varepsilon\sqrt{2}$-réseau pour Π

et donc Π est pré-compact. Comme il est fermé

(démontrez-le !), il es compact

(Exo. 11). ∎

Exo. 17, TD1.

a) Soit (K_n) une suite décroissante de compacts dans E, un espace métrique, c.à.d. $K_{n+1} \subset K_n$ $\forall n$. Montrons que $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

Prenons x^n quelconque dans K_n, $x^n \in K_n$. Par la decroissance de compacts $x^n \in K_m$, pour tout $m \leq n$. Comme $(x^n)_{n \geq 1} \subset K_1$ et K_1 est compact, $\exists (x^{n_k}) \subset (x^n)$ - une suite convergente t.q. $x^{n_k} \to x^0$ $(k \to \infty)$. Puisque K_1 est fermé, $x^0 \in K_1$.
Or, $(x^{n_k})_{k \geq 2} \subset K_{n_2} \Rightarrow x^0 \in K_{n_2}$ et donc $x^0 \in K_{n_2} \subset$ $\subset K_{n_2 - 1} \subset K_{n_2 - 2} \dots \subset K_1$. De la même manière, $(x^{n_k})_{k \geq m} \subset K_{n_m}$ et donc $x^0 \in K_{n_m} \subset K_{n_m - 1} \subset \dots K_1$. Comme $n_m \to +\infty$, on a $x^0 \in K_m$ $\forall m$ et donc $x^0 \in \bigcap_m K_m$.

b). Soit O - un ouvert t.q. $\bigcap_n K_m \subset O$. Montrons $\exists n$ t.q. $K_n \subset O$ (on aura alors que $K_m \subset O$, $m \geq n$ par la décroissance $K_m \subset K_n$). Par absurde N: supposons $\exists (l_k)$ t.q. $K_{l_k} \not\subset O$, ou $l_k \to +\infty$ bien $K_{l_k} \cap O^c \neq \emptyset$ (O^c est fermé). On choisit $x^k \subset K_{l_k} \cap O^c$. En passant à la suite extraite $(x^{k_n}) \subset$ $\subset (x^k)$, $x^{k_n} \to x^0$ $(n \to \infty)$. Or, $(x^{k_n}) \subset O^c$ et, par la propriété de fermé, $x^0 \in O^c$. Par a) $x^{k_n} \to x^0$ et $x^0 \in \bigcap_n K_n \subset O$, contradiction !

(Exo. 17). $\boxed{\equiv}$