Feuille d'exercices n° 2.

Exercice 1

(a) Rappeler les définition d'espaces (ensembles) c_{00}, c_0, c, l^∞ et $l^p,\ 1 \leq p < \infty$.

(b) Montrer que
$$c_{00} \subset c_0 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

(c) Dans cette question, on muni l'ensemble c_{00} de la norme l^∞. Etudier la convergence des suites d'éléments données dans les espaces énumérés la-dessus
$$x^n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots),$$
$$x^n = (\frac{1}{n^\alpha}, \dots, \frac{1}{n^\alpha}, 0, \dots),\ \alpha > 0,$$
$$x^n = (\frac{1}{1^\alpha}, \frac{1}{2^\alpha}, \dots, \frac{1}{n^\alpha}, 0, \dots)$$
où les composantes de x^n sont zéro à partir de la $n+1$ entrée.

(d) Soit $clos_X A$ le fermeture (ou l'adhérence) de l'ensemble A dans la métrique de l'espace X. Montrer que
$$clos_{l^\infty} c_{00} = c_0, \quad clos_{l^p} c_{00} = l^p, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Exercice 2

(a) Montrer que l'inclusion $l^p \subset l^q,\ 1 \leq p < q$ est stricte.

(b) Idem pour $l^1 \subset c_0$ et, plus généralement, $l^p \subset c_0, 1 \leq p < \infty$.

Exercice 3 Calculer la distance entre les fonctions
$$x(t) = t^2, \quad y(t) = \alpha t + 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$$
dans les espaces $C^1[0,1], L^1[0,1]$, en fonction de α.

Exercice 4 Les suites suivantes sont-elles convergentes dans les espaces indiqués? Si oui, donner leur limites
$$x_n(t) = t^n - t^{n+1}, \quad y_n(t) = t^n - t^{2n}, \quad X = C[0,1],$$
$$x_n(t) = t^{n+1}/(n+1) - t^{n+2}/(n+2), \quad X = C[0,1], C^1[0,1],$$
$$x_n(t) = t/(1+n^2t^2), \quad X = C[0,1], L^1[0,1],$$
$$x_n(t) = te^{-nt}, \quad X = C[0,10], L^1[0,10],$$
$$x_n(t) = (\sin nt)/n, \quad X = C[-\pi,\pi], L^1[-\pi,\pi], C^1[-\pi,\pi].$$

Exercice 5 Montrer que l'ensemble
$$A = \{x \in l^2 : x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_j > 0 \quad \forall j\}$$

n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 6 Montrer que les ensembles suivants sont ouverts

$$A = \{x(t) \in C[0,1] : 1 < x(t) < 3\},$$
$$B = \{x(t) \in C[0,1] : \sin t < x(t) < 1 + t,\ t \in [0,1]\}.$$

Exercice 7 Soit (X, d) un espace métrique. Soit $a, b \in X$. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in X : d(x,a) = d(x,b)\}$$

est fermé. Egalement, montrer que l'ensemble

$$B = \{x \in X : \alpha < (x,a) + d(x,b) < \beta\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

est ouvert.

Exercice 8 Montrer que toutes deux normes sur un e.v.n. de dimension finie sont nécessairement équivalentes (et définissent donc la même topologie).

Exercice 9 Montrer que toute application linéaire agissant sur un e.v.n. de dimension finie est continue.

Exercice 10 Soit $X = l^p$ ou bien $X = L^p[0,1]$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que la boule unité fermée de X n'est pas compacte.

Exercice 11 (Quelques exemples d'ensembles compacts)

(a) Rappeler la définition d'un ensemble compact (pré-compact). Donner les critères de la compacité dans un espace de Banach.

(b) Considèrons l'ensemble

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| \leq 1/n \quad \forall n\}$$

appartenant à l^2. Démontrer que Π est compact.

(c) Soit maintenant

$$\Pi_\alpha = \{x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| \leq 1/n^\alpha \quad \forall n\}, \quad \alpha > 0$$

considéré comme un sous-ensemble de l^p, $1 \leq p < \infty$. Pour quels $\alpha > 0$ Π_α est-il compact dans l^p?

Exercice 12 (le cas d'espace réel)

(a) Soit H un espace d'Hilbert. Démontrer que pour tout $x, y \in H$

$$2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x+y||^2 + ||x-y||^2. \qquad (*)$$

(b) Inversement, soit H un e.v.n. avec la norme satisfaisante la relation $(*)$. Montrer que c'est un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire donné par

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2).$$

Exercice 13 En utilisant l'exercice précédent, démontrer que l'on ne peut pas transformer les espaces $C[0, 1]$ (ou l^1) en espaces pré-hilbertiens en préservant leur norme.

Exercice 14 Soit $x^1, x^2 \in H$, un espace pré-hilbertien, et on a

$$Re(x^1, x^2) = ||x^1||^2 = ||x^2||^2.$$

Montrer que alors $x^1 = x^2$.

Exercice 15 Soit H un espace de Hilbert et $L \subset H$ un sous-espace. Montrer que $x \in L^\perp$ ssi

$$||x|| \leq ||x - y||$$

pour tout $y \in L$.

Exercice 16 Orthogonaliser les éléments

$$x_0(t) = 1,\ x_1(t) = t,\ x_2(t) = t^2,\ x_3(t) = t^3$$

dans l'espace $L^2[0, 1]$.

Exercice 17

(a) Soit $y(t) = t^3$. Dans $L^2[0, 1]$, trouver les projections de cet élément sur les sous-espaces $\mathcal{P}^n[0, 1],\ n = 0, 1, 2$.

(b) La même question pour $y(t) = e^t$, $L^2[-1, 1]$ et $\mathcal{P}^n[0, 1],\ n = 0, 1, 2$.

Exercice 18 Soit T l'application de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ où $a = (a_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que T est linéaire continue et calculer la norme de T.

Exercice 19 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.

(a) Démontrer que l'application $\|.\|$ est une norme sur E. Dans les questions suivantes, E est muni de cette norme.

(b) Soit c un réel positif et L l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $L(P) = P(c)$. Démontrer que L est linéaire et continue si et seulement si $c \in [0, 1]$. Calculer la norme de L lorsque L est continue.

(c) L'application $P \to P'$ est elle continue sur E ?

Exercice 20 Soit T l'application de $E = C([0,1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(c)$ où c est un réel de l'intervalle $[0,1]$. E est muni de la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Montrer que T n'est pas continue.

Exercice 21 Soit $E = C([0,\pi], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$. On désigne par φ un élément fixé de E et par T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^\pi f(x)\varphi(x)\, dx.$$

(a) Démontrer que T est linéaire et continue.

(b) Calculer la norme de T lorsque φ est φ est ≥ 0.

(c) Calculer la norme de T lorsque φ est la fonction $x \to \cos x$.

Exercice 22 Soit $E = c_0$ muni de sa norme usuelle et soit $\lambda = (\lambda_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes telle que $\lambda_n \neq 0$ pour tout n. On pose $T_\lambda(a) = (\lambda_n a_n)_n$, $a = (a_n) \in c_0$.

(a) Démontrer que T est une application linéaire continue de c_0 dans lui-même. Déterminer sa norme.

(b) Est-ce que T_λ est injective?

(c) Établir une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que T_λ soit surjective.

Exercice 23 Soit H un espace d'Hilbert, et $K \subset H$ un ensemble convexe (que l'on suppose fermé pour la simplicité). Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $h \notin K$, il existe l'unique $g \in K$ tel que

$$d(h,K) = \inf_{f\in K} ||h - f|| = ||h - g||. \tag{1}$$

C'est à dire, la distance est atteinte, et, de plus, sur l'unique vecteur de K.

(a) Supposons d'abord que $g \in K$ en question existe. Démontrer, par absurde, qu'il est alors unique.

Indication: supposez qu'il y a deux vecteurs g', g'' avec les propriétés recherchées. Considérez leur combinaison convexe.

(b) Soit maintenant $(g_n) \subset K$ une suite de vecteurs qui fournit le inf dans la relation (1). En utilisant l'inégalité de parallélogramme, montrer que la suite (g_n) est nécéssairement Cauchy.

(c) Conclure.