Feuille d'exercices n° 4.

Dans cette feuille de TD, H désigne par défaut un espace de Hilbert.

Exercice 1. Soient $x, y \in H$. Montrer que $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ ssi $x \perp y$.

Exercice 2. Soit $L \subset H$ un sous-espace. Montrer que $x \in L^\perp$ ssi

$$||x|| \leq ||x-y|| \quad \forall y \in L.$$

Exercice 3.

1. Soit $x \in H,\ x \neq 0$, et $L = lin(x)$. Donner P_L et $P_{L^\perp}$.
2. Soient $x^1, x^2 \in H,\ x^i \neq 0$, et $L = lin(x^1, x^2)$. La même question dans les cas: a) x^1, x^2 sont orthogonaux; b) x^1, x^2 sont libres (mais pas orthogonaux en général) (cf. le procédé de Gram-Schmidt ou l'Exo. 4).

Exercice 4. Soient $(g^i)_{i=1,\ldots,n}$ des vecteurs de H. Considérons

$$G = G(g^1, \ldots, g^n) = [\langle g^j, g^k \rangle]_{j,k=1,\ldots,n}.$$

1. Montrer que $G = G(g^1, \ldots, g^n) \geq 0$ (en tant que matrice).
2. Montrer que $G > 0$ ssi $(g^i)_{i=1,\ldots,n}$ est une famille libre. Cette condition est supposée satisfaite dans la suite de l'exercice.
3. Soit $L = lin(g^j : j = 1, \ldots, n)$. Donner P_L et $P_{L^\perp}$ en termes de G.
4. * Soit $g \in H$. Montrer que

$$d(g,L)^2 = \inf_{y \in L} ||g-y||^2 = \frac{G(g, g^1, \ldots, g^n)}{G(g^1, \ldots, g^n)}$$

Exercice 5. Orthogonaliser les éléments

$$x_0(t) = 1,\ x_1(t) = t,\ x_2(t) = t^2,\ x_3(t) = t^3$$

dans l'espace $L^2[0,1]$.

Exercice 6.

1. Soit $y(t) = t^3$. Dans $L^2[0,1]$, trouver les projections de cet élément sur les sous-espaces $\mathcal{P}^n[0,1],\ n = 0,1,2$.
2. La même question pour $y(t) = e^t$, $L^2[-1,1]$ et $\mathcal{P}^n[0,1],\ n = 0,1,2$.

Exercice 7. (système complet dans un espace de Hilbert).

1. Soit H un Hilbert, $(x^n)_{n\geq 1} \subset H$ une suite de vecteurs de H. Rappelons que $(x^n)_n$ s'appelle complète, ssi
$$\overline{lin\,(x^n,\ n\geq 1)} = H.$$
Montrer que $(x^n)_n$ est complet, ssi $((y\in H, \forall n\geq 1 : \langle y, x^n\rangle = 0) \Rightarrow y = 0)$.
2. Soit H un Hilbert separable (rappeler la définition de la separabilité!). Montrer que H possède alors un système complet $(x^n)_n$.
3. Rappeler le procédé d'orthogonalisation (orthonormalisation) de Gram-Schmidt. Démontrer que tout espace de Hilbert separable admet une base orthonormale (=BON).
4. En déduire que tout espace de Hilbert separable est (isométriquement) isomorphe à l^2.

Exercice 8. Montrer que les familles de vecteurs suivantes forment des BON dans les espaces respectifs:

1. $x_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi},\ n\in\mathbb{Z}, \quad H = L^2[0,2\pi]$;
2. $x_0(t) = 1/\sqrt{2\pi},\ x_{2n}(t) = \cos(nt)/\sqrt{\pi},\ x_{2n+1}(t) = \sin(nt)/\sqrt{\pi},\ n\geq 1, \quad H = L^2[0,2\pi]$;
3. $P_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\big\{(1-t^2)^n\big\}^{(n)}, \quad H = L^2[-1,1]$ (les polynômes de Legendre);
4. $L_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}e^t\big\{t^n e^{-t}\big\}^{(n)}, \quad H = L^2(\mathbb{R}_+, e^{-t})$ (les polynômes de Laguerre);
5. $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\big\{e^{-t^2}\big\}^{(n)}, \quad H = L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$ (les polynômes d'Hermite).

Exercice 9. (théorème de Riesz-Fischer)
Soit $L : l^2 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue (ici, il s'agit de $l^2 = l^2(\mathbb{R})$). Montrer que, nécéssairement, il existe $a\in l^2$ tel que:
$$L(x) = L_a(x) = \langle x, a\rangle, \quad ||L_a||_o = ||a||, \quad \forall x\in l^2.$$

Exercice 10. Soit $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ une application donnée par
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(s)\,ds.$$

1. Montrer que l'application T est linéaire et continue. Donner une majoration de sa norme.
2. Calculer l'application adjointe de T.

Exercice 11. Soit H un espace d'Hilbert, et $L\subset H$ un sous-espace. Notons par $P = P_L : H\to L$ la projection orthogonale sur L.

1. Calculer le Ker, l'image, la norme et le spectre de P.
2. Démontrer que $P^2 = P$ et $P^* = P$.
3. Vice versa: soit P' un opérateur satisfaisant les conditions de la question précedente. Montrer que, nécessairement, c'est un projecteur orthogonal sur un sous-espace de H.