Devoir surveillé du 29/03/2017, 13H30-15H, Amphi A, bâtiment A29

Un aide-mémoire d'une page est autorisé.

Exercice 1.
Soit (E,d) un espace métrique.

(1) Soit $(x_n)_n$ une suite dans E telle que $\sum_n d(x_{n+1}, x_n) < \infty$. Montrer que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

(2) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}$.

(3) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E telle qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers un point $l \in E$. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers l.

(4) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) E est complet.

(b) Toute suite $(x_n)_n$ telle que $\sum_n d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$ est convergente.

(c) Toute suite $(x_n)_n$ telle que pour tout n, $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$ est convergente.

Exercice 2. Soit $\phi \in C^0([0,1])$ une fonction fixée. On introduit l'espace vectoriel $E = C^0([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \mid f(x) \mid$. Considérons la forme linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ donnée par

$$T(f) = \int_0^1 \phi(x) f(x)\, dx.$$

(a) Calculer la norme $||T|| = \sup_{||f||_\infty \leq 1} |Tf|$ de l'application.

(b) Présenter les cas où: a) le sup ci-dessus est atteint; b) le sup ci-dessus n'est pas atteint.

(c) Donner une condition suffisante (et, de préférence, assez générale) pour que le sup de la définition de $||T||$ soit atteint.

Exercice 3. Soit X un espace de Banach, et $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $||T|| < 1$. Le but de cet exercice est de construire l'opérateur inverse à $(I - T)$.

(a) Pour tout $x \in X$, posons
$$Sx = \sum_{k=0}^{\infty} T^k x.$$
Montrer que cette série converge dans le sens de la convergence en norme de l'espace X.

(b) Vérifier que $S\,(I - T) = (I - T)\,S = I$ et donc $S = (I - T)^{-1}$.

(c) Démontrer que $||(I - T)^{-1}|| \leq (1 - ||T||)^{-1}$.

(d) Donner un exemple d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$, $||T|| = 1$, pour lequel la construction des questions précédentes ne s'applique pas.