**Devoir maison n° 1 (optionnel).**

*Ce devoir est optionnel. Il est à rendre au CM du 28/02/2017.*

**Exercice 1.** (Révisions - l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^d$)
Soit $x = (x_j)_{j=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^d$. Définissons

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j|, \quad ||x||_2 = \big(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\big)^{1/2},$$

$$||x||_\infty = \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|.$$

(a) Démontrez que $||.||_p$ avec $p = 1, 2, \infty$, définies ci-dessus sont des normes.

(b) Démontrez que ces normes sont équivalentes, i.e.:

$$||x|| \leq ||x||_1 \leq d||x||_\infty, \quad \frac{1}{\sqrt{d}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1,$$

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{d}||x||_\infty.$$

(c) Montrez que ces inégalités sont exactes, i.e. pour chaque inégalité (simple) il existe un $x \in \mathbb{R}^d$ pour lequel on a le cas d'égalité.

(d) Montrez que les normes $||.||_p$, $p = 1, 2, \infty$, ne sont pas équivalentes pour le cas d'espaces $l^p$ (de dimension infinie).

**Exercice 2.** Soient $(E, d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $E$.

(a) Montrer que $\overline{A} = \cap_{r>0} V_r(A)$ où $V_r(A) = \{x \in E, d(x, A) < r\}$.

(b) En déduire que tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts. Que peut–on dire pour les ouverts?

(c) Donner un exemple d'une réunion dénombrable de fermés qui n'est pas fermée; idem pour l'intersection dénombrable d'ouverts.

**Exercice 3.** Soit $E$ l'espace des fonctions continues à support dans $[0, 2]$ (c'est-à-dire nulles en dehors de $[0, 2]$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $\| \cdot \|_1 : E \to \mathbb{R}^+$ par :

$$\|f\|_1 := \int_0^2 |f(x)|\, dx.$$

(a) Montrer que l'application $(E, \| \cdot \|_1)$ est une espace normé, c'est-à-dire que $\| \cdot \|_1$ est une norme définie sur $E$.

(b) Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n \in E$ définie par:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \\ -\dfrac{n}{2}\, x + \dfrac{n+1}{2} & \text{pour } x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{pour } x \in \left[1 + \frac{1}{n}, 2\right]. \end{cases}$$

Tracer $f_n$ pour quelques valeurs de $n$ et, pour tout $x \in [0, 2]$, donner la limite de $f_n(x)$ quand $n$ va à l'infini.

(c) Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $E$, pour la norme $\|\cdot\|_1$. (On pourra supposer qu'une limite $f$ existe et la comparer avec la limite ponctuelle $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ sur $[0,1[$ et sur $]1,2]$.)

(d) Montrer que l'espace $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

**Exercice 4.** L'espace $\mathcal{P}[0,1]$ de polynômes sur l'intérvalle $[0,1]$ est-il ouvert dans $C[0,1]$? fermé dans $C[0,1]$?

**Exercice 5.** Soit $E$ un espace métrique compact. Démontrer que pour qu'une suite soit convergente, il faut et il suffit qu'elle admette une seule valeur d'adhérence. Donner un contre-exemple à ceci si $E$ n'est pas compact.