Université Bordeaux I **M1 Analyse Complexe**
Master I de Mathématiques 2014-2015

DM

• Exercice 1.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^k}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = 2i\pi \binom{2n}{n}$.

3. Majorer $\displaystyle\left|\int_{\partial D(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz\right|$.

4. En déduire que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

5. Soit un réel $a > 4$. On pose $u_n(z) = \dfrac{(1+z)^{2n}}{a^n z^{n+1}}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(e^{it})$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

6. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_{\partial D(0,1)} u_n(z) dz = -a \int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2 - (a-2)z + 1}$.

7. Calculer $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2 - (a-2)z + 1}$.

8. Montrer que la série que la série ci–dessous converge et la calculer

$$\sum_{n\geq 0} a^{-n} \binom{2n}{n}.$$

• Exercice 2.

1. Soient $M > 0$ et f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert $D(0,1)$ telle que $|f(z)| \leq M$ sur $D(0,1)$ et $f(0) \neq 0$.

1.1. Montrer que pour tout entier $n \neq 0$, la fonction f est holomorphe au voisinage de chaque compact $\overline{D(0, 1 - \frac{1}{n})}$.

1.2. Montrer que f possède un nombre fini de zéros sur $\overline{D(0, 1 - \frac{1}{n})}$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$.

1.3. En déduire que l'ensemble des zéros de f sur $D(0,1)$ est au plus dénombrable.

2. On suppose que l'ensemble des zéros de f est dénombrable. On notera $(a_n)_n$ la suite des zéros de f ordonnée par modules croissants (i.e. $|a_n| \leq |a_{n+1}|$). Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé et $r \in \mathbb{R}$ tels que $|a_N| < r < 1$. On pose

$$B(z) = \prod_{j=1}^{j=N} \frac{(a_j/r) - z}{1 - (\overline{a_j}/r)z} \qquad \text{et} \qquad g(z) = \frac{f(rz)}{B(z)}.$$

2.1. Montrer que la fonction B est holomorphe sur $D(0, \frac{r}{|a_N|})$.

2.2. Montrer que g se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque $D(0, 1/r)$.

2.3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $\left|\dfrac{a_j - re^{i\theta}}{r - \overline{a_j}e^{i\theta}}\right| = 1$. En déduire que $|B(e^{i\theta})| = 1$.

2.4. Montrer que $|g(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(0,1)$.

2.5. Montrer que pour tout réel r tel que $1 > r > |a_N|$ on a

$$r^N \frac{|f(0)|}{M} \leq \prod_{j=1}^{j=N} |a_j|.$$

2.6. Montrer que pour $1 > r > |a_N|$

$$\sum_{j=1}^{N} (1 - |a_j|) \leq \log M - \log |f(0)| - N \log r.$$

2.7. En déduire que la suite $\left(\sum_{j=1}^{N}(1 - |a_j|)\right)_N$ est bornée.

3. (cette partie est facultative) Soit F une fonction holomorphe sur le demi–plan $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\ z > 0\}$. On suppose que F est **non identiquement nulle**, F est bornée sur $\mathbb{C}_-$ et $F(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

3.1. Montrer que l'application $\phi : z \rightarrow (1 + z)/(1 - z)$ est une bijection de $D(0,1)$ sur $\mathbb{C}_-$. Calculer ϕ^{-1} est montrer que c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}_-$.

3.2. On pose $g = F \circ \phi$. Montrer que g est holomorphe sur $D(0,1)$, bornée sur $D(0,1)$ et $g((n-1)/(n+1)) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

3.3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et f holomorphe sur $D(0,1)$ avec $f(0) \neq 0$ et $g(z) = z^p f(z)$ pour tout $z \in D(0,1)$.

3.4. En déduire que F est identiquement nulle sur $\mathbb{C}_-$. Conclusion ?