Correction du DS de TMF704 "Analyse complexe" du 2016.

Exercice 1

1) Soit $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $a \in \mathcal{D}(0,1)$.

Clairement :

1.a) φ_a est continue sur $\overline{\mathcal{D}(0,1)}$ (car $p(z) = z-a$, $q(z) = 1-\bar{a}z$ sont des polynômes, donc continues ; de plus, $q(z)=0$ ssi $z = 1/\bar{a} \in \left(\overline{\mathcal{D}(0,1)}\right)^c$).

1.b) pour la même raison, $\varphi_a \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}(0,1))$ (car $p(z), q(z)$ sont holomorphes et $q(z) \neq 0$).

1.c) $\zeta \in b\mathcal{D}(0,1)$ ssi $|\zeta| = 1$, ou bien $|\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta} = 1$, ce qui revient à $\bar{\zeta} = 1/\zeta$. Donc :

$$|\varphi_a(\zeta)| = \left|\frac{\zeta - a}{1-\bar{a}\zeta}\right| = \left|\frac{\zeta-a}{\zeta(\bar{\zeta}-\bar{a})}\right| = \frac{1}{|\zeta|}\cdot\left|\frac{\zeta-a}{\bar{\zeta}-\bar{a}}\right| \underset{|\zeta|=1}{=}$$

$$= \frac{|\zeta-a|}{|\zeta-a|} = 1.$$

2). On fait la démonstration pour le pt. $z=a_1$ (de multiplicité m_1) ; on procède par l'analogie pour d'autres points a_k, $k=1..n$. Il vient que

$$f(z) = \sum_{k=m_1}^{\infty} a_k(z-a_1)^k = (z-a_1)^{m_1}\Big(\underbrace{\sum_{k=m_1}^{\infty} a_k(z-a_1)^{k-m_1}}_{= h(z),\ h(a_1)\neq 0}\Big) \quad (1)$$

Il est facile de voir que :

2.a) $h(z) = f(z)/(z-a_1)^{m_1} \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}(0,1)\setminus\{a_1\})$.

comme le quotient de fonctions holomorphes avec le dénominateur $\neq 0$.

2.b) $\in Hol(D(a_1,\delta))$, $\delta>0$ par (1).

Donc $\in Hol(D(0,1))$, et

$$f(z)=(z-a_1)^{m_1}h(z)=\left(\frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}\right)^{m_1}\underbrace{h(z)\cdot(1-\bar{a}_1 z)^{m_1}}_{g(z)\in Hol(D(0,1))}$$

– la fonction recherchée, $f(z)=\varphi_{a_1}(z)^{m_1}\cdot g(z)$.

3) Comme $|\varphi_{a_k}(\zeta)|=1$, $\forall \zeta\in bD(0,1)$ $\forall k=1,\dots n$,

on a $\|f\|_{\infty,bD(0,1)}=\|g\|_{\infty,bD(0,1)}$.

~~D'autre part,~~ En particulier, $\forall\zeta\in bD(0,1)$:

$$|g(\zeta)|\leq\|g\|_{\infty,bD(0,1)}=\|f\|_{\infty,bD(0,1)}.$$

De la même manière (le ppe de maximum):

$$|g(0)|=\left|\frac{f(z)}{\varphi_{a_1}(z)^{m_1}\dots\varphi_{a_n}(z)^{m_n}}\Big|_{z=0}\right|\leq\|f\|_{\infty,bD(0,1)},$$

et $$\frac{f(z)}{\varphi_{a_1}(z)^{m_1}\dots\varphi_{a_n}(z)^{m_n}}\Big|_{z=0}=\frac{f(0)}{\varphi_{a_1}(0)^{m_1}\dots\varphi_{a_n}(0)^{m_n}}=$$

$$=\frac{f(0)}{a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}},$$ d'où le résultat.

(Exo. 1) $\blacksquare$

<u>Exo. 2</u> porte sur les applications immédiates du thm. de Cauchy, II. En effet:

1) $x\in\mathbb{R}$, $r>0$ t.q. $r\neq|x|$. On a:

$$\int_{bD(0,r)}\frac{dz}{z-x}=2\pi i\cdot \mathrm{Ind}_{bD(0,r)}(x)=2\pi i\cdot\begin{cases}1, & |x|<r,\\ 0, & |x|>r.\end{cases}$$

2). De la même manière : décomposons la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^3-1)} = \frac{1}{(z-1)(z-e^{\frac{2\pi i}{3}})(z-e^{-\frac{2\pi i}{3}})}$ en fractions simples ; on a :

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}} - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\right).$$

Donc, pour $r<1$:

$$\int_{bD(0,r)} \frac{dz}{z^3-1} \underset{\uparrow}{=} 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

$f(z) = \frac{1}{(z^3-1)} \in Hol(D(0,r))$.

Pour $r>1$:

$$\int_{bD(0,r)} \frac{dz}{z^3-1} \underset{\uparrow}{=} \frac{2\pi i}{3}\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right) =$$

le thm Cauchy, II

$$= \frac{2\pi i}{3}\left(\cancel{1}-\cos\frac{\pi}{3}+\cancel{i\sin\frac{\pi}{3}}-\cos\frac{\pi}{3}-\cancel{i\sin\frac{\pi}{3}}\right) = 0.$$

---

3). Le calcul de cette intégrale suit les mêmes lignes :

$$\int_{bD(0,1)} \frac{dz}{6z^2-5z+1} = \int_{bD(0,1)} \frac{dz}{z^2\left(\frac{1}{z^2}-\frac{5}{z}+6\right)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} w = \frac{1}{z} \\ dw = -\frac{1}{z^2}dz \end{array} \right| = \underset{\uparrow}{(-1)(-1)} \int_{bD(0,1)} \frac{dw}{w^2-5w+6} = \int_{bD(0,1)} \frac{dw}{(w-2)(w+3)} =$$

changement de l'orientation.

$$= 0 \quad \left(\text{car } f(w) = \frac{1}{(w-2)(w-3)} \in Hol(D(0,1))\right).$$

---

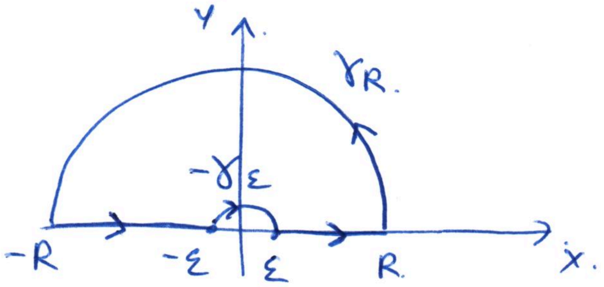
4) - facile (comme la démo resemble aux questions 1)-3), elle est omise ...).

(Exo. 2) ▨

Exo. 3 Soit $\gamma_\rho : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ le démi-cercle donné par $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$. Posons.

$$g(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathbb{C}^*.$$

1) Soit $\Gamma_{\varepsilon,R} = [\varepsilon, R] \cup \gamma_R \cup [-R,-\varepsilon] \cup (-\gamma_\varepsilon)$ (cf. le dessin).



Puisque $g \in Hol(Int(\Gamma_{\varepsilon,R}))$, on a $\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} g(z)dz = 0$. Or.

$$0 = \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} g(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{2iz}-1}{z^2}dz + \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{2iz}-1}{z^2}dz - \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz.$$

Donc,

$$\underset{(z=x)}{\int_\varepsilon^R} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx - \underset{(z=-x)}{\int_R^\varepsilon} \frac{e^{-2ix}-1}{x^2}dx = \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz - \int_{\gamma_R} g(z)dz.$$

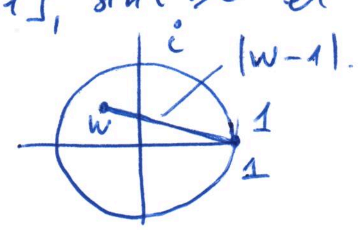
et $$\int_\varepsilon^R \frac{(e^{2ix}+e^{-2ix})-2}{x^2}dx = \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz - \int_{\gamma_R} g(z)dz,$$

ou bien $$2\int_\varepsilon^R \frac{\cos 2x - 1}{x^2}dx = \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz - \int_{\gamma_R} g(z)dz.$$

2). On a $R>0$, $t \in [0,1]$, et

$$e^{2iRe^{it}} = e^{2iR(\cos t + i\sin t)} = e^{2iR\cos t - 2R\sin t} \overset{\text{déf}}{=} w.$$

Comme $t\in[0,1]$, $\sin t \geq 0$ et donc $|w| \leq 1$. Par conséquent



, $\underline{|w-1| \leq 2}$.

3) En effet,

$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz\right| \le \int_0^{\pi} |g(Re^{it})|\cdot|dz| \le \int_0^{\pi}\frac{2}{R^2}\cdot R\,dt =$$

$dz = Re^{it}\cdot i\,dt$.

$|dz| = R\,dt$.

$$|g(Re^{it})| = \frac{|e^{2iRe^{it}}-1|}{|Re^{it}|^2} \le \frac{2}{R^2}$$

donc

$$= \frac{2}{R}\cdot\pi \longrightarrow 0 \quad (R\to+\infty).$$

4). Soit $w\in\mathbb{C}^*$, calculons

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{e^{2i\varepsilon w}-1}{\varepsilon w} \underset{t=\varepsilon w}{=} \lim_{t\to0}\frac{e^{2it}-1}{t} = \left(e^{2it}\right)'\Big|_{t=0} =$$

car $g(t)=e^{2it}\in Hol(\mathbb{C})$.

$$= 2ie^{2it}\Big|_{t=0} = \boxed{2i}$$ (de plus, la convergence est uniforme par rapp. à ε).

5) Il en découle:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{2iz}-1}{z^2}\,dz = \left|z=\varepsilon e^{it}\right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{\pi}\frac{e^{2i\varepsilon e^{it}}-1}{\cancel{\varepsilon^2 e^{2it}}_{\ \varepsilon e^{it}}}\cdot \cancel{\varepsilon i e^{it}}_{\ i}\,dt = i\cdot 2i\int_0^{\pi}dt = -2\pi.$$

6). En récapitulant 1)-5), on a $(\varepsilon\to0,\ R\to+\infty)$

$$\underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz}_{\to\,-2\pi} - \underbrace{\int_{\gamma_R} g(z)\,dz}_{\to\,0} = \lim_{\substack{\varepsilon\to0+\\ R\to+\infty}} 2\int_\varepsilon^R \frac{\cos(2x)-1}{x^2}\,dx =$$

$$= -2\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\,dx = -4\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

On obtient alors $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}}$

(Exo. 3) ∎