Université de Bordeaux Master 1 2016-2017

DS Analyse Complexe M1
Vendredi 4 novembre 14h-16h

Exercice 1. Soit $f : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$ et holomorphe dans $D(0,1)$. On suppose que f s'annule en des points $a_1, \dots a_N \in D(0,1)$ avec multiplicité $m_1, \dots, m_N$. On pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{\zeta \in \partial D(0,1)} |f(\zeta)|.$$

1 Pour $a \in D(0,1)$ on pose

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Montrer que φ_a est continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$ et que $|\varphi_a(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial D(0,1)$.

2 Montrer qu'il existe $g : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{D(0,1)}$ et holomorphe dans $D(0,1)$ telle que

$$f(z) = \varphi_{a_1}(z)^{m_1}\varphi_{a_2}(z)^{m_2} \dots \varphi_{a_N}(z)^{m_N} g(z), \qquad \forall z \in \overline{D(0,1)}$$

3 Majorer $|g(\zeta)|$ en fonction de $\|f\|_\infty$ pour tout $\zeta \in \partial D(0,1)$ et en déduire l'inégalité

$$|f(0)| \leq |a_1|^{m_1} \dots |a_N|^{m_N} \|f\|_\infty.$$

Exercice 2.

1 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tel que $r \neq |x|$. Calculer, suivant les valeurs de x, l'intégrale curviligne suivante

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{dz}{z-x}.$$

2 On suppose $r > 0$ et $r \neq 1$. En utilisant la question 1, calculer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{dz}{z^3-1}.$$

3 Calculer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{6z^2-5z+1}.$$

4 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Montrer que

$$I(r) = \int_{\partial D(0,r)} \frac{dz}{az^2 + bz + c}$$

est nulle lorsque r est suffisamment grand (Calculer d'abord $\lim_{r \to +\infty} I(r)$).

Exercice 3. Pour tout $\rho > 0$, on note $\gamma_\rho : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ le **demi**-cercle défini par $\gamma_\rho = \rho e^{it}$. Soit

$$g(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

1 Montrer que si $0 < \epsilon < R$ alors

$$\int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz - \int_{\gamma_R} g(z) dz = 2 \int_\epsilon^R \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} dx.$$

2 Montrer que si $R > 0$ et $t \in [0, 1]$, alors $|e^{2iRe^{it}} - 1| \leq 2$

3 En déduire que l'on a

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz = 0.$$

4 Pour $w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, déterminer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{2i\epsilon w} - 1}{\epsilon w}.$$

5 En déduire

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz.$$

6 Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$