Université de Bordeaux | **TMF704**
2018 | **Analyse complexe**

Devoir Surveillé du 16/11/2018,

les documents non-autorisés; durée: 1h 30

Exercice 1. (Questions du cours)
Soit $O \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f \in Hol(O)$.

1. Soit $\gamma \subset O$ un chemin fermé. Énoncez les théorèmes de Cauchy pour :
   a) la valeur de la fonction f en un point a à l'intérieur de γ;
   b) la valeur de la dérivée $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, en un point a à l'intérieur de γ.

   Faites l'attention toute particulière à bien énoncer les hypothèses requises pour ces résultats!

2. Soit $a \in O$ et $D(a,r) \subset O$. Énoncez les inégalités de Liouville (de Cauchy-Liouville) pour $f^{(p)}(a)$, $p \in \mathbb{N}$.

3. Donner le théorème de Liouville sur les fonctions entières.

Exercice 2. Calculez les intégrales suivants:

$$\int_{bD(0,2)} \frac{z^2+1}{(z-1)^3}\,dz, \quad \int_{bD(0,3)} \frac{e^{iz}}{z^2-3z+2}\,dz,$$
$$\int_{bD(0,3/2)} \frac{e^{iz}}{z^2-3z+2}\,dz.$$

Exercice 3. Soit $D = D(0,1)$. Rappelons le lemme de Pick: soit $f \in Hol(D)$ telle que

$$||f||_{D,\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)| \leqslant 1$$

et $f(0) = 1$. Alors pour tout $z \in D$, $|f(z)| \leqslant |z|$ et $|f'(0)| \leqslant 1$. Le but de cet exercice est de démontrer une version généralisée de ce résultat.

1. Soit $a \in D$ un point arbitraire. Définissons

   $$\phi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z} : D \to \mathbb{C}.$$

   Démontrer que:

   a) pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

   $$(\phi_a)^{-1}(z) = \phi_a(z).$$

   Ci-dessus, $(\phi_a)^{-1}$ est la fonction réciproque à ϕ_a et non l'inverse multiplicatif.

b) $\phi_a : D \to D$ est une fonction holomorphe et bijective;

c) $\phi_a(\{z : |z| = 1\}) = \{z : |z| = 1\}$.

2. Soit $f \in Hol(D)$ et $||f||_{D,\infty} \leqslant 1$. Démontrer que

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leqslant \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|, \quad \forall z \in D, \qquad (1)$$

et

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |a|^2}. \qquad (2)$$

Indication: pour (1), considérer $g(z) = \phi_{f(a)} \circ f \circ \phi_a(z)$ et y appliquer le lemme de Pick.

Exercice 4. Soit $a > 0$. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$I_a = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

1. Justifiez l'existence (= la convergence) de l'intégrale I_a.
2. Soit maintenant

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}, \quad \gamma_R = [-R, R] \cup C_R,$$

où $C_R = \{Re^{i\phi} : \phi \in [0, \pi]\}$. Le chemin γ_R est parcouru dans le sense positif. (faites le dessin de γ_R).

Montrez que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0.$$

Indication: utilisez l'inégalité $|e^{iz}| \leqslant 1$ pour tout $z \in C_R$.

3. Pour R assez grand, calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$$

à l'aide du théorème de Cauchy.

4. En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{ae^a}$$

et conclure.

FIN