Université de Bordeaux — M1 Analyse Complexe
Master I de Mathématiques 2014-2015

Devoir surveillé
Mardi 16 Décembre 2014, 13h-17h
Documents autorisés

Exercice I (4 points). On pose

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 - 1}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-,$$

où log est la détermination du logarithme complexe sur $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_- = \mathbb{C}\backslash\{iy\ ,\ y \leq 0\}$.

(1) Donner l'expression de $\log z$ pour $z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_-$. Calculer les résidus de f en ses différents pôles.

(2) Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ converge. Utiliser le changement de variable $x = 1/u$ pour montrer qu'en fait cette intégrale vaut 0.

(3) Montrer que l'intégrale suivante est convergente et calculer sa valeur par la méthode des résidus selon le contour d'intégration orienté positivement (voir dessin)

$$[1/R, R] \cup \{Re^{it}\,:\, t \in [0, \pi/2]\} \cup [iR, i/R] \cup \{e^{it}/R\,:\, t \in [\pi/2, 0]\}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx.$$

Exercice II (4 points). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels. Soit $M = \sup\limits_{x\in[-2,2]} |P(x)|$. On pose

$$f(z) = z^n P\big(z + \frac{1}{z}\big)$$

(1) Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(2) Montrer que $M = \sup\limits_{|z|=1} |f(z)|$.

(3) En déduire que pour $|z| \geq 1$,

$$|P(z + \frac{1}{z})| \leq M|z|^n.$$

(4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 2$ on a $|P(x)| \leq M|x|^n$.

Exercice III (5 points). Soit Ω un ouvert connexe et soit f holomorphe et injective sur Ω.

(1) Soit $a \in \Omega$, on suppose que $f'(a) = 0$. Soit $r > 0$ telle que f' ne s'annule qu'en a sur $D(a,r)$. Justifier l'existence d'un tel r.
(2) On pose $g(z) = f(z) - f(a)$. Montrer que a est un zéro de g d'ordre $m \geq 2$.
(3) Justifier que
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - b} dz$$
est en fait le nombre de zéros de $f(z) - b$.
(4) On pose $\Gamma = f(\partial D(a,r))$. Calculer $\mathrm{Ind}_\Gamma(f(a))$.
(5) En déduire $\mathrm{Ind}_\Gamma(b)$ pour $b \in D(f(a), s)$ avec s bien choisi.
(6) Montrer que f' ne s'annule jamais.

Exercice IV (10 points). **I.** Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose
$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(z) = \cos(iz).$$
Si $\sin(z) \neq 0$, on pose
$$\mathrm{cotan}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

I.1. Montrer que pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$,
$$|\cos(\pi z)|^2 = \frac{1}{2}(\cos(2\pi x) + \mathrm{ch}(2\pi y)) \quad \text{et} \quad |\sin(\pi z)|^2 = \frac{1}{2}(-\cos(2\pi x) + \mathrm{ch}(2\pi y)).$$
En déduire que l'ensemble des solutions de $\sin \pi z = 0$ est $\mathbb{Z}$.

I.2. Soit γ_n le chemin orienté positivement correspondant au rectangle $\mathcal{R}_n = A_n B_n C_n D_n$ avec
$$A_n = (n + \frac{1}{2}) + in, \quad B_n = (-n - \frac{1}{2}) + in, \quad C_n = (-n - \frac{1}{2}) - in, \quad D_n = (n + \frac{1}{2}) - in.$$

Soit $\zeta \notin \mathbb{Z}$ à l'intérieur du rectangle $\mathcal{R}_n$. Montrer que la fonction
$$f(z) = \frac{\mathrm{cotan}(\pi z)}{z^2 - \zeta^2}$$
possède 2n+3 pôles à l'intérieur de γ_n que l'on déterminera. Calculer le résidu de f en chacun de ces pôles.

I.3. Pour $\zeta \notin \mathbb{Z}$ comme ci-dessus, calculer
$$I_n(\zeta) = \int_{\gamma_n} \frac{\mathrm{cotan}(\pi z)}{z^2 - \zeta^2} dz$$

I.4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\zeta) = 0$ pour tout $\zeta \notin \mathbb{Z}$. Indication utiliser la question I.1. pour montrer que la fonction $\mathrm{cotan}(\pi z)$ est bornée sur γ_n indépendamment de n.

I.5. Montrer que si $z \notin \mathbb{Z}$,
$$\pi \,\mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

II. On rappelle que les nombres de Bernoulli B_n, $n \geq 0$, sont définis par le développement de Taylor

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Nous avons $B_0 = 0$ et pour tout $n > 0$ et $(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$.

II.1. Montrer que $\operatorname{cotan}(z) = i(e^{2iz}+1)/(e^{2iz}-1)$ et en remarquant que cotan est une fonction impaire, déduire que

$$z \operatorname{cotan}(z) = \frac{2iz}{e^{2iz}-1} + iz = \sum_{n \geq 0} (-1)^n B_{2n} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

En déduire le développement de Laurent de $\operatorname{cotan}(z)$ à l'origine.

II.2. On pose $\mathcal{C}_n(z) = \operatorname{cotan}(z)/z^{2n}$, $n \geq 0$. Donner le développement de Laurent de $\mathcal{C}_n(z)$ à l'origine. En déduire

$$\operatorname{Res}(\mathcal{C}_n(z), 0) = (-1)^n B_{2n} \frac{2^{2n}}{(2n)!}.$$

Calculer $\operatorname{Res}(\mathcal{C}_n(z), k\pi)$ pour $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$

II.3. Soient $m > 0$ et $m\pi < R < (m+1)\pi$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,R)} \mathcal{C}_n(z) dz = \sum_{-n \leq k \leq n} \operatorname{Res}(\mathcal{C}_n, k\pi)$$

II.4. En faisant tendre R vers l'infini, montrer que la fonction ζ de Riemann vérifie

$$\zeta(2n) := \sum_{k \geq 1} k^{-2n} = (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}.$$