Université de Bordeaux **2018-2019**
TMQ302U – Fonctions de plusieurs variables

Devoir Surveillé du 13/11/2018.

Corrigé

Exercice 1.

1. *Donner la définition d'une partie compacte de $\mathbb{R}^d$.*
Cf. cours et le polycopié, Déf. 1.5.1, p. 10.

2. *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble. Donner la définition d'une application continue sur A.*
Cf. cours et le polycopié, Déf. 2.3.1, p. 15.

3. *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, et $f : K \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application continue. L'ensemble $f(K)$ est-il compact? L'application f est-elle uniformement continue sur K? (énoncer les résultats du cours correspondants)*
Cf. cours et le polycopié, Th. 2.4.2, 2.4.4, p. 17.

4. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application continue et $K \subset \mathbb{R}^{d_1}$ un compact.*
Est-il vrai que $f^{-1}(K)$ est ouvert? Non. Contre-exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x, K = \{0\}$, $f^{-1}(K) = \{0\}$ n'est pas ouvert.

   $f^{-1}(K)$ est-il un fermé? Oui. Résultat du cours (polycopié, Th. 2.3.3, p. 15)

   $f^{-1}(K)$ est-il un compact? Non. Contre-exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = sin(x), K = \{0\}$, $f^{-1}(K) = \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas un compact.

Exercice 2.

1. *Étudier l'existence de limites suivantes et les calculer le cas échéant:*

   - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$.

     En utilisant les coordonnées polaires (r, θ), on a $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, et donc

$$\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3(cos(\theta) + 2\sin(\theta))^3}{r^2} = r(\cos(\theta) + 2\sin(\theta))^3.$$

Comme $(\cos(\theta)+2\sin(\theta))^3$ est une fonction bornée, on a

$$\lim_{r\to 0^+} r(\cos(\theta)+2\sin(\theta))^3 = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = 0.$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4+y^4}{x^2-y^2}$.

  Considérons les suites $\{(x_n,y_n) = (\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}),\ n\in\mathbb{Z}\}$ et $\{(x'_n,y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}),\ n\in\mathbb{Z}\}\}$. On a $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}(x'_n,y'_n) = (0,0)$. Calculons

  $$\frac{3x_n^4+y_n^4}{x_n^2-y_n^2} = \frac{\left(\frac{3}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})\right)+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})-\frac{1}{n^2}} = \frac{4+o(1)}{-2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2,$$

  et

  $$\frac{3{x'}_n^4+{y'}_n^4}{{x'}_n^2-{y'}_n^2} = \frac{\frac{3}{n^4}+\left(\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})\right)}{\frac{1}{n^2}-\left(\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})\right)} = \frac{4+o(1)}{-2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -2.$$

  Comme on a deux limites differéntes, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4+y^4}{x^2-y^2}$ n'existe pas.

- $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\log(e^x+e^{2y})}{x-y}$.

  La fonction $f:(x,y)\mapsto \frac{\log(e^x+e^{2y})}{x-y}$ est une fonction usuelle, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq y\}$. Comme $(2,1)\in\mathcal{D}$, on a

  $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\log(e^x+e^{2y})}{x-y} = f(2,1) = \frac{\log(e^2+e^2)}{2-1} = \log(2e^2) = \log 2+2.$$

2. *Étudier la continuité de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

La fonction f est une fonction usuelle sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, elle est donc continue sur ce domaine. Étudions sa continuité en $(0,0)$. Rappelons d'abord que l'on a $|\sin(t)|\leqslant|t|, \forall t\in\mathbb{R}$. Par conséquent

$$\left|\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = |y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant |y|.$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y| = 0$, par le théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Donc f est continue en $(0,0)$.

Exercice 3. *Soit* $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par la relation suivante*

$$g(x,y) = \frac{x^2 y^3}{3x^4 + 2y^6}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

1. *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, posons* $L_a = \{(x,y) : y = ax\}$*. Montrer que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in L_a} g(x,y) = 0, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

   On a

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in L_a} g(x,y) &= \lim\nolimits_{x\to 0} \tfrac{x^2(ax)^3}{3x^4+2(ax)^6} \\ &= \lim\nolimits_{x\to 0} \tfrac{a^3x^5}{x^4(1+2a^6x^2)} \\ &= \lim\nolimits_{x\to 0} \tfrac{a^3x}{1+2a^6x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. *Montrer que la limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

   n'existe pas.

   Si cette limite existait, elle doit être égale à 0 d'après la question précédente. Or, si on prend $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2})$, $n = 1, 2, \ldots$, alors d'une part on a $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$, et d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^6}\frac{1}{n^6}}{3\frac{1}{n^{12}} + 2\frac{1}{n^{12}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}.$$

   D'où la conclusion.

Exercice 4. *Rappelons que* $\mathbb{R}^d = (\mathbb{R}^d, ||.||_2)$*, où*

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_i)_{i=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^d.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que pour toute norme $||.||'$ *(pas nécessairement euclidienne) il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$c||x||_2 \leqslant ||x||', \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. *Considérons* $S = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x||_2 = 1\}$*. L'ensemble* S *est-il compact?* Oui. Il s'agit d'une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^d$.

   Dans la suite de cet exercice, on admet qu'il existe $C > 0$ **telle que** $\forall x \in \mathbb{R}^d : ||x||' \leqslant C||x||_2$**.**

2. *Soit* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ *une fonction définie par la relation*

$$f(x) = ||x||'.$$

Montrez que f *est continue sur* $\mathbb{R}^d$.

On doit vérifier que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{x \to x_0} ||x||' = ||x_0||'.$$

Rappelons que par définition $\lim_{x \to x_0} ||x - x_0||_2 = 0$. Comme on a $||x - x_0||' \leqslant C||x - x_0||_2$, il s'ensuit $\lim_{x \to x_0} ||x - x_0||' = 0$ (par le théorème des gendarmes). Par hypothèse, $||.||'$ est une norme, elle vérifie donc l'inégalité triangulaire

$$||x_0||' - ||x_0 - x||' \leqslant ||x||' \leqslant ||x_0||' + ||x - x_0||'.$$

Puisque

$$\lim_{x \to x_0} (||x_0||' - ||x_0 - x||') = ||x_0||' - \lim_{x \to x_0} ||x - x_0||' = ||x_0||'$$

et

$$\lim_{x \to x_0} (||x_0||' + ||x_0 - x||') = ||x_0||' + \lim_{x \to x_0} ||x - x_0||' = ||x_0||',$$

on en déduit que $\lim_{x \to x_0} ||x||' = ||x_0||'$.

3. *A l'aide de résultats du cours (précisez lesquels!) démontrez que*

$$\inf_{x \in S} f(x) = \min_{x \in S} f(x) = \min_{x \in S} ||x||' \overset{\text{déf}}{=} c > 0.$$

En déduire que $c||x||_2 \leqslant ||x||'$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

D'après un résultat du cours, si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors il existe $x_0 \in K$ tel que

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x).$$

Appliquer ce résultat pour $f(x) = ||x||'$ et $K = S$, on obtient qu'il existe un élément $x_0 \in S$ tel que

$$||x_0||' = \min_{x \in S} ||x||'.$$

Posons $c = ||x_0||'$. Par définition, on a $c > 0$, et

$$c \leqslant ||x||', \ \forall x \in S.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On a $\frac{x}{||x||_2} \in S$, et

$$c \leqslant \left\| \frac{x}{||x||_2} \right\|' = \frac{||x||'}{||x||_2} \quad (\text{car } \frac{x}{||x||_2} \in S) \Rightarrow c||x||_2 \leqslant ||x||'.$$

Si $x = 0$, on a évidemment $||x||' = c||x||_2 = 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$c||x||_2 \leqslant ||x||'.$$

FIN