TMQ302, 2018

Note : démonstration du critère d'appartenance d'une application à la classe C^1.

Soient $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$, $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.

Théorème. $f \in C^1(O, \mathbb{R}^{d_1})$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(O, \mathbb{R}^{d_1})$ $\forall j = 1, \dots d$.

⚠

Corollaire si on a $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(O, \mathbb{R}^{d_1})$ $\forall j = 1, \dots d$, alors $f \in \mathcal{D}(O, \mathbb{R}^{d_1})$.

Démo

($\Rightarrow$) Rappelons que $f \in C^1(O, \mathbb{R}^{d_1})$ veut dire que $f \in \mathcal{D}(O, \mathbb{R}^{d_1})$ (l'appli. est différentiable) et $\mathcal{D}f : O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d_1})$ est continue, c.à.d

$|||\mathcal{D}f(x) - \mathcal{D}f(x^\circ)||| \to 0$ si $\|x - x^\circ\| \to 0$; $x, x^\circ \in O$

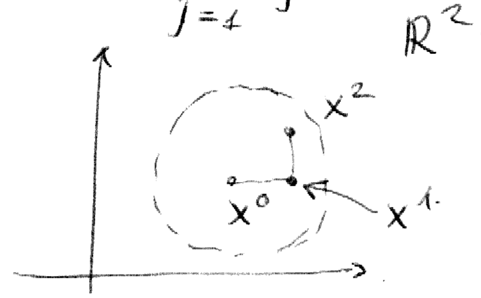
En particulier, nous avons (cf. la déf. de $|||.|||$) : $\forall$ vecteur de base $(e^j)_{j=1,\dots d}$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^\circ) \right\| = \|(\mathcal{D}f(x) - \mathcal{D}f(x^\circ))e^j\| \leq$$
$$\leq |||\mathcal{D}f(x) - \mathcal{D}f(x^\circ)||| \to 0$$
$$(\|x - x^\circ\| \to 0).$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est donc clairement continue sur O.

($\Leftarrow$) Soit $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ continues sur O. Montrons que l'application f est alors différentiable sur O. Le fait que $f \in C^1(O, \mathbb{R}^{d_1})$ découlera alors du fait que $\mathcal{D}f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_d}\right]$ et les $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues (Exercice !).

Soit $x^\circ \in O$. Si $f \in \mathcal{D}(x^\circ)$, alors forcement $\mathcal{D}f(x^\circ) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_d}\right](x^\circ)$. Posons $x^\circ = x^\circ$, $x^1 = x^\circ + h_1 e^1$, etc. $x^k = x^\circ + \sum_{j=1}^{k} h_j e^j$, $x^d = x^\circ + \sum_{j=1}^{d} h_j e^j = x^\circ + h$. (cf. le dessin pour $d=2$).



Notons que si $x^\circ + h \in B(x^\circ; \delta)$, $\delta > 0$, alors $x^k \in B(x^\circ, \delta)$ également. (0)

Ecrivons donc

$$\alpha(x^\circ, h) = f(x^\circ + h) - f(x^\circ) - (\mathcal{D}f)(x^\circ) \cdot h \qquad (1)$$

et démontrons que $\lim_{h \to 0} \frac{\|\alpha(x^\circ, h)\|}{\|h\|} = 0$

(ou bien $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$ t.q. $\|h\| < \delta \Rightarrow \|\alpha(x^\circ; h)\| \leq \varepsilon \cdot \|h\|$).

On a :

$$f(x^\circ + h) - f(x^\circ) - (\mathcal{D}f)(x^\circ) \cdot h = \sum_{j=1}^{d} \left(f(x^j) - f(x^{j-1})\right) - \qquad (2)$$

$$- \mathcal{D}f(x^\circ) \cdot h \ \boxed{=}$$

$g_j(t) = f(x^{j-1} + t h_j e^j)$, $t \in [0, 1]$. On a :

$$f(x^j) - f(x^{j-1}) = g_j(1) - g_j(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{j-1} + s h_j e^j)\, ds \cdot h_j$$

Leibniz, la diff. d'appli. composée.

$$\boxed{=} \sum_{j=1}^{d} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{j-1}+sh_j e^j)\,ds \cdot h_j - \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)\cdot h_j}_{= Df(x^0)\cdot h} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{j=1}^{d} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{j-1}+sh_j e^j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \right) ds \right\} h_j \qquad (2')$$

car $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)}_{\text{const. par rapp. à } s} \cdot \int_0^1 ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)\cdot ds.$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On prend $\delta > 0$ suffisamment petit (son choix va être clair un peu plus bas) et $h \in \mathbb{R}^d$ t.q. $x^0 + h \in B(x^0, \delta)$ (alors tous les pts $x^{j-1} + sh_j e^j \in B(x^0, \delta)$ aussi, $j = 1, \dots d$; faites un dessin!)

On majore en $\|\cdot\|$ l'expression de (2):

$$\|f(x^0+h) - f(x^0) - Df(x^0)\cdot h\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cf. (2),(2')}}}{\leq} \sum_{j=1}^{d} \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{j-1}+sh_j e^j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \right\| \cdot |h_j| \leq \underbrace{\sup_{x \in B(x^0,\delta),\ j=1,\dots d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \right\|}_{< \varepsilon \text{ (on choisit } \delta > 0 \text{ tel que ce sup} < \varepsilon)} \cdot \sum_{j=1}^{d} |h_j| \leq$$

Ensuite $\sum_{j=1}^{d} |h_j| = \|h\|_1 \leq \sqrt{d}\, \|h\|_2 = \sqrt{d}\, \|h\|$, et donc

$\leq \varepsilon \cdot \sqrt{d}\, \|h\|$, ce qui est exactement (1).

(Démo) $\blacksquare$