Note 2 : le théorème de Taylor d'ordre 2 pour les fonctions de plusieurs variables.

Théorème Soit $f : O \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction $(d_1 = 1)$ et $x \in O$. Supposons $f \in C^2(O, \mathbb{R})$. Alors on a

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)\cdot h + \frac{1}{2}\left(D^2 f(x)h, h\right) + R_2(f, h),$$

où $h \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur de longueur suffisamment petite (i.e., $x + h \in B(x, \delta) \subset O$, $\delta > 0$), et

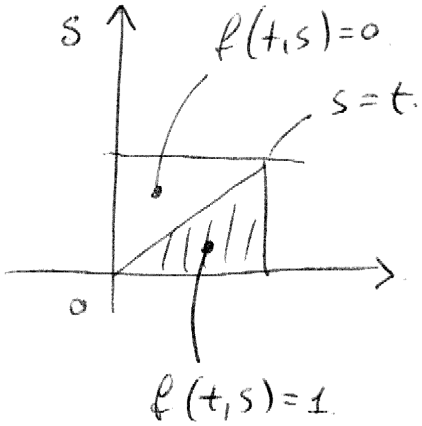
$$\lim_{h \to 0} \frac{|R_2(f,h)|}{\|h\|^2} = 0.$$

$\triangle$

Rq • le terme $(D^2 f(x)h, h)$ peut s'écrire comme $(D^2 f(x)h, h) = h^t \cdot D^2 f(x) \cdot h$.

• puisque $f \in C^2(O)$, $D^2 f(x)$ est une matrice (ou une forme bilinéaire) symétrique.

Lemme (admis) soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,1] \times [0,1]$ ($(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$), cf. le dessin. Alors



$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(s,t)\,ds \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(s,t)\,dt \right) ds.$$

En particulier, si $f(t,s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq t \\ 0, & s > t \end{cases}$,

on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^t ds \right) dt = \int_0^1 \left(\int_s^1 dt \right) ds = 1/2.$$

$$\int_0^1 t\,dt \qquad\qquad \int_0^1 (1-s)\,ds$$

Démo (du théorème). On refait à peu près la même construction que dans le cas de démonstration du critère d'appartenance à C^1, mais à l'ordre 2. On a :

$$f(x+h) - f(x) \underset{\substack{\varphi(t) = f(x+th) \\ t \in [0,1]}}{=} \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = \int_0^1 Df(x+th)\,dt \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}^d$$

d'où

$$f(x+h) - f(x) - Df(x)\cdot h = \int_0^1 (Df(x+th) - Df(x))\,dt \cdot h.$$

On refait le même procédé avec $Df(x+th) - Df(x)$ (en faisant attention à la définition de $D^2 f$ (ceci est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}))$:

$$Df(x+th) - Df(x) \underset{\psi(s) = Df(x+sh)}{=} \psi(t) - \psi(0) = h^t \cdot \int_0^t D^2 f(x+sh)\,ds,$$

Par conséquent,

$$f(x+h) - f(x) - Df(x)\cdot h = h^t \int_0^1 \left(\int_0^t D^2 f(x+sh)\,ds \right) dt \cdot h =$$

$$= h^t \int_0^1 D^2 f(x+sh) \cdot \left(\int_{1-s}^1 dt \right) ds \cdot h =$$

$$= h^t \cdot \int_0^1 (1-s)\, D^2 f(x+sh)\,ds \cdot h.$$

On remarque que (cf. le lemme)

$$\int_0^1 (1-s)ds = \frac{1}{2}, \text{ et donc}$$

$$\frac{1}{2} h^t \cdot D^2 f(x) \cdot h = h^t \cdot \int_0^1 (1-s) D^2 f(x) ds \cdot h, \text{ et.}$$

$$f(x+h) - f(x) - Df(x) \cdot h - \frac{1}{2} h^t \cdot D^2 f(x) \cdot h =$$

$$= h^t \int_0^1 (1-s)\left(D^2 f(x+sh) - D^2 f(x)\right) ds \cdot h \underset{\substack{\uparrow \\ \text{déf.}}}{=} R_2(f,h).$$

Il reste à montrer que le reste $R_2(f,h)$, défini de cette manière, satisfait les conditions du théorème. En effet :

??? $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. $\|h\| < \delta \Rightarrow |R_2(f,h)| \leq \varepsilon \cdot \|h\|^2$.

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on choisit $\delta > 0$ en sorte que $\forall h' \in B(0,\delta)$: $|||D^2 f(x+h') - D^2 f(x)||| < \varepsilon$ (par continuité de $D^2 f(x)$ sur O). Alors

$$\left| h^t \int_0^1 (1-s)\left(D^2 f(x+sh) - D^2 f(x)\right) ds \cdot h \right| \leq \int_0^1 (1-s) \cdot$$

$$\left| \left(\{D^2 f(x+sh) - D^2 f(x)\} h, h \right) \right| ds \leq \int_0^1 (1-s) \underbrace{|||D^2 f(x+\underset{\downarrow\, h'=sh}{sh}) - D^2 f(x)|||}_{<\varepsilon} \cdot \|h\|^2 ds \leq \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \|h\|^2.$$

(Thm). ∎