Université de Bordeaux **2017-2018**

**TMQ302U – Fonctions de plusieurs variables**

# Devoir Surveillé du 28/11/2017.

**Documents non-autorisés, durée: 1h 20.**

**Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).**

**Exercice 1**. (Questions du cours)

1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. Donner la définition de la différentielle de $f$ au point $x^0 \in O$; de la différentiabilite de $f$ sur $O$ tout entier.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Donner la définition de $D_v f(x^0)$, la dérivée de $f$ au point $x^0$ en direction de $v$.
3. La différentiabilité de $f$ au point $x^0$ implique-t-elle l'existence de $D_v f(x^0)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$? L'implication inverse est-elle vraie?
4. Soit $f$ différentiable au point $x^0$. Exprimer la dérivée directionnelle $D_v f(x^0)$ en fonction de la différentielle $Df(x_0)$ de la fonction.

**Exercice 2**. Considérons l'application

$$F(x) = (x, x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+,$$

où $(.\,,.)$ désigne le produit scalaire réel usuel.

1. *En utilisant la définition*, étudier la différentiabilité de $F$ sur $\mathbb{R}^d$ et calculer sa différentielle.

2.* Soit maintenant

$$G(x) = \sin{(x, x)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

En utilisant la question précédente, étudier la différentiabilité de $G$ et calculer sa différentielle.

**Exercice 3**. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Considérons

$$g(x, y) = f(\sin x + 2\cos y) + \cos x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

1. Étudier la différentiabilité de $g$ et calculer sa différentielle.

2. Démontrer que $g$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$(2\sin y)\frac{\partial g}{\partial x} + (\cos x)\frac{\partial g}{\partial y} = 2\sin x \sin y.$$

**Exercice 4**. Soit

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y - y^2x}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de $F$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $F$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

3. Enoncer le critère d'appartenance d'une application à la classe $C^1$ en termes de ses dérivées partielles.

4. L'application $F$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$? sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?

5.* Etudier la différentiabilité de l'application $F$ au point $(0,0)$.

**FIN**