Université de Bordeaux **2017-2018**
TMQ302U – Fonctions de plusieurs variables

Devoir Surveillé du 28/11/2017.

Documents non-autorisés, durée: 1h 20.

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1. *(Questions du cours)*

1. *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. Donner la définition de la différentielle de f au point $x^0 \in O$; de la différentiabilite de f sur O tout entier.*
2. *Soit $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Donner la définition de $D_v f(x^0)$, la dérivée de f au point x^0 en direction de v.*
3. *La différentiabilité de f au point x^0 implique-t-elle l'existence de $D_v f(x^0)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$? L'implication inverse est-elle vraie?*
4. *Soit f différentiable au point x^0. Exprimer la dérivée directionnelle $D_v f(x^0)$ en fonction de la différentielle $Df(x_0)$ de la fonction.*

Confer Cours.

Exercice 2. *Considérons l'application*

$$F(x) = (x, x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+,$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire réel usuel.

1. En utilisant la définition, *étudier la différentiabilité de F sur $\mathbb{R}^d$ et calculer sa différentielle.*
   Soient x_0 et h dans $\mathbb{R}^d$. La bilinéarité du produit scalaire implique que

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + L(h) + ||h||_2 \varepsilon(h)$$

   où

$$L(h) = 2(x_0, h)$$

   est une application linéaire sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\varepsilon(h) = \frac{(h, h)}{||h||_2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$0 \leqslant |\varepsilon(h)| \leqslant \frac{||h||_2^2}{||h||_2} = ||h||_2$$

donc $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi, F est différentiable en x_0 avec

$$dF_{x_0}(h) = 2(x_0, h).$$

2.* *Soit maintenant*

$$G(x) = \sin(x, x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

En utilisant la question précédente, étudier la différentiabilité de G et calculer sa différentielle.

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc différentiable sur $\mathbb{R}$ avec

$$d\sin_t(s) = \sin'(t)s = \cos(t)s$$

pour tout t et s dans $\mathbb{R}$. $G = \sin \circ F$ est donc différentiable sur $\mathbb{R}^d$ en tant que composée de fonctions différentiables avec

$$dG_{x_0}(h) = d\sin_{F(x_0)}(dF_{x_0}(h)) = 2\cos((x_0, x_0))(x_0, h)$$

pour tout x_0 et h dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Considérons*

$$g(x, y) = f(\sin x + 2\cos y) + \cos x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

1. *Étudier la différentiabilité de g et calculer sa différentielle.*

Posons $u(x, y) = \sin(x) + 2\cos(y)$ et $\pi(x, y) = x$. π est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en tant que application linéaire avec $d\pi_{(x_0,y_0)} = \pi$ pour tout (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$. u est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions différentiables avec

$$\begin{aligned} du_{(x_0,y_0)}(h, k) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &= \cos(x_0)h - 2\sin(y_0)k \end{aligned}$$

pour tout (x_0, y_0) et (h, k) dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, $g = f \circ u + \cos \circ \pi$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme et composée de fonctions différentiables avec

$$\begin{aligned} dg_{(x_0,y_0)}(h, k) &= df_{u(x_0,y_0)}\left(du_{(x_0,y_0)}(h, k)\right) + d\cos_{\pi(x_0,y_0)}\left(d\pi_{(x_0,y_0)}(h, k)\right) \\ &= f'(u(x_0, y_0))\, du_{(x_0,y_0)}(h, k) - \sin(\pi(x_0, y_0)) d\pi_{(x_0,y_0)}(h, k) \\ &= f'(\sin(x_0) + 2\cos(y_0))(\cos(x_0)h - 2\sin(y_0)k) - \sin(x_0)h \\ &= \left[f'(\sin(x_0) + 2\cos(y_0))\cos(x_0) - \sin(x_0)\right] h \\ &+ \left[-2\sin(y_0) f'(\sin(x_0) + 2\cos(y_0))\right] k \end{aligned}$$

pour tout (x_0, y_0) et (h, k) dans $\mathbb{R}^2$.

2. *Démontrer que g satisfait l'équation différentielle suivante*
$$(2\sin y)\frac{\partial g}{\partial x} + (\cos x)\frac{\partial g}{\partial y} = -2\sin x \sin y.$$

   Le calcul précédent assure que
$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= f'(\sin(x) + 2\cos(y))\cos(x) - \sin(x),\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -2\sin(y) f'(\sin(x) + 2\cos(y))
\end{aligned}$$
   pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, le second membre de l'équation différentielle vaut $-2\sin(x)\sin(y)$.

Exercice 4. Soit
$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y - y^2x}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.*

   F est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en tant que fraction rationnelle bien définie. De plus, pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|F(x,y)| \leqslant \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + \frac{y^2|x|}{x^2+y^2} \leqslant |y| + |x|$$
   donc $F(x,y)$ tend vers $0 = F(0,0)$ lorsque (x,y) tend vers 0 donc F est continue en $(0,0)$.

2. *Montrer que F admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.*
   F admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en tant que fraction rationnelle et un calcul direct assure que
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2(x^2+2xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^2(x^2-2xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$
   pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. Les applications partielles de F en $(0,0)$ sont les fonctions nulles donc sont dérivables en 0 de dérivées nulles donc
$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. *Enoncer le critère d'appartenance d'une application à la classe C^1 en termes de ses dérivées partielles.*
   Confer cours.

4. *L'application F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$? sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?*
   F est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en tant que fraction rationnelle bien définie. F n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car la dérivée partielle de F par rapport à x n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, pour $x \neq 0$,

$$F(x,x) = 1/2$$

   converge vers $1/2 \neq F(0,0)$ lorsque x tend vers O^+.

5.* *Etudier la différentiabilité de l'application F au point $(0,0)$.*
   Montrons que F n'est pas différentiable en $(0,0)$. Par l'absurde. Il existe une fonction $\varepsilon(x,y)$ qui tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ telle que

$$F(x,y) = F(0,0) + \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y + ||(x,y)||_2 \varepsilon(x,y)$$

   pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Cela implique que pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\varepsilon(x,y) = \frac{x^2y - y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

   Cette fonction ne vérifie pas la propriété requise car $\varepsilon(x,2x) = -2/5^{3/2}$...

FIN