Université de Bordeaux **2016-2017**
TMQ302U – Fonctions de plusieurs variables

Devoir Surveillé du 29/11/2016.

Documents non-autorisés, durée: 1h 20.

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1. (Questions du cours)

1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. Donner la définition de la différentiabilité de f au point $x^0 \in O$; de la différentiabilité sur O tout entier.
   Confer cours.

2. Démontrer que f différentiable au point x^0 y est continue. L'implication inverse est-elle vraie?

   Confer cours.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (*i.e.,* une application linéaire allant de $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{R}^d$). Soit

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle^2, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\langle .\,, .\rangle$ désigne le produit scalaire réel usuel.

1. **En utilisant la définition**, étudier la différentiabilité de F sur $\mathbb{R}^d$ et calculer sa différentielle.

   Soit la fonction $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \langle Ax, x\rangle$ et $x, h \in \mathbb{R}^d$.
   $g(x+h) = g(x)+\langle Ax, h\rangle+\langle Ah, x\rangle+g(h) = g(x)+\langle (A+A^t)x, h\rangle+g(h)$.
   L'application $h \longmapsto \langle (A + A^t)x, h\rangle$ est linéaire. De plus, en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de A (application linéaire en dimension finie), $|g(h)| \leqslant \|Ah\|\|h\| \leqslant \|A\|\|h\|^2$.
   Il vient que, $g(x+h)-g(x)-\langle (A+A^t)x, h\rangle = g(h) = O(\|h\|^2) = o(\|h\|)$.
   g est donc différentiable et $dg_x(h) = \langle (A + A^t)x, h\rangle$ par unicité de la différentielle. On conclut que $f = g^2$ est différentiable et,

$df_x(h) = 2g(x)dg_x(h) = 2\langle Ax, x\rangle\langle (A + A^t)x, h\rangle$.
On pouvait aussi par un calcul direct montrer que:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + 2\langle Ax, x\rangle\langle (A + A^t)x, h\rangle + g(h)\big(2g(x) \\ &+ 2\langle (A + A^t)x, h\rangle + g(h)\big) + \langle (A + A^t)x, h\rangle^2 \end{aligned}$$

et montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité des applications linéaires A et $A+A^t$ que le terme en bleu est en $o(\|h\|)$.

2. Retrouver le même résultat faisant le recours aux dérivées partielles.
Soit $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ la matrice associée à A. Notons que $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2g\frac{\partial g}{\partial x_k}$
$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j) = \sum_{1\leqslant j\leqslant d} a_{kj}x_j + \sum_{1\leqslant i\leqslant d} a_{ik}x_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant d}(a_{kj} + a_{jk})x_j$.
$dg_x(h_1, \ldots, h_d) = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant d}\frac{\partial f}{\partial x_k}h_k = \sum_{1\leqslant k,j\leqslant d}(a_{kj} + a_{jk})x_j h_k$
$= \langle (A + A^t)x, h\rangle$, avec $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $h = (h_1, \ldots, h_d)$.
On retrouve donc le même résultat en écrivant $df_x(h) = 2g(x)dg_x(h)$.

Exercice 3. Soit $g : D_g \to \mathbb{R}^2, D_g \subset \mathbb{R}^3$, une application donnée par

$$g(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{x+2y}{z^2+1}\right) \\ \\ \frac{\cos(2x+y)}{x^2+1} \end{bmatrix}.$$

1. Préciser le domaine D_g de l'application g.
$D_g = \mathbb{R}^3$

2. Etudier la continuité de g sur D_g.
La fonctions $(x, y, z) \longmapsto \dfrac{x + 2y}{z^2 + 1}$ est à image dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}^3$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction *sin* étant continue sur $\mathbb{R}$, on déduit que $(x, y, z) \longmapsto \sin\left(\dfrac{x + 2y}{z^2 + 1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ comme composée de deux fonctions continues.
Les fonctions $(x, y, z) \longmapsto 2x + y$ et $(x, y, z) \longmapsto x^2 + 1$ à image dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement sont continues sur $\mathbb{R}^3$. Puisque les fonctions *cos* et $u \longmapsto \frac{1}{u}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ respectivement, on déduit que $(x, y, z) \longmapsto \cos(2x + y)$ et $(x, y, z) \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$ comme composées de fonctions continues et donc que la fonction $(x, y, z) \longmapsto \frac{\cos(2x+y)}{x^2+1}$ est continues sur $\mathbb{R}^3$ comme produits de fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$. Toutes les composantes de g étant continues sur $D_g = \mathbb{R}^3$, g est continue sur D_g.

3. L'application g est-elle différentiable sur D_g? Si oui, écrire sa différentielle.

   g est différentiable sur D_g la preuve se fait exactement comme à la question précédente juste en remplaçant continue par différentiable.
   La différentielle en tout point $(x, y, z) \in D_g$ est donnée par l'application linéaire défini par la matrice jacobienne associée à g en (x, y, z).

$$J(g)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z^2+1}\cos\left(\frac{x+2y}{z^2+1}\right) & \frac{2}{z^2+1}\cos\left(\frac{x+2y}{z^2+1}\right) & -\frac{2z(x+2y)}{(z^2+1)^2}\cos\left(\frac{x+2y}{z^2+1}\right) \\ -2\frac{(x^2+1)\sin(2x+y)+x\cos(2x+y)}{(x^2+1)^2} & -\frac{\sin(2x+y)}{x^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

   F est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il reste l'étude en $(0,0)$.
   En posant posant $x = rcos\theta$ et $y = rsin\theta$, $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a,
   $|F(x,y) - F(0,0)| \leqslant \frac{|x-y|^3}{x^2+y^2} = r|\cos\theta - \sin\theta|^3 \leqslant 2^3 r \rightarrow 0, \quad (r \to 0, \ \ \theta \in \mathbb{R})$
   F est donc continue en $(0,0)$.

2. Montrer que F admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

   F est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables dont le dénominateur ne s'annule pas. F admet donc des dérivées partielles en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définies par,
   $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \left(x^2 + 3y^2 + 2xy\right)\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)^2,$
   $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\left(3x^2 + y^2 + 2xy\right)\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)^2.$
   En $(0,0)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x,0)-F(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0).$
   De même $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{F(0,y)-F(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{y^3}{y^3} = -1 = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0).$

3. Enoncer le critère d'appartenance d'une application à la classe C^1 en termes de ses dérivées partielles.

   Voir cours

4. L'application F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

   Non. En effet, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.
   Il suffit de remarquer que sur les droites d'équation $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (1+3a^2+2a)(\frac{1-a}{1+a^2})^2$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -(3+a^2+2a)(\frac{1-a}{1+a^2})^2$ dépendent uniquement du réel a.

5.* Étudier la différentiabilité de l'application F au point $(0,0)$.

   Soit $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$. Posons,
   $T(h_1,h_2) = \frac{|F(h_1,h_2)-F(0,0)-\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)h_1-\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)h_2|}{\|(h_1,h_2)\|_2} = \frac{2|h_1-h_2||h_1h_2|}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$.
   Pour $a \in \mathbb{R}$, $T(h_1,ah_1) = \frac{|a||1-a|}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ dépend uniquement du réel a donc
   $$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{|F(h_1,h_2)-F(0,0)-\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)h_1-\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)h_2|}{\|(h_1,h_2)\|_2} \text{ n'existe pas.}$$
   On conclut que F n'est pas différentiable en $(0,0)$.

FIN