Université de Bordeaux | 2017
TTI303U | Analyse 2 pour Math-Info

Devoir Surveillé du 23/11/2017

Documents et calculatrice non autorisés. Durée: 1h 20

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées, c'est-à-dire soit démontrées, soit validées par un contre-exemple.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. *Donner la définition d'un compact de $\mathbb{R}^d$.*
   Confer cours.

2. *Donner deux caractérisations de compacité équivalentes à la définition de la question précédente.*
   Confer cours.

3. *Soit K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^d$. L'ensemble $K_1 \cup K_2$ est-il compact? Idem pour $K_1 \cap K_2$? Idem pour $K_1 \backslash K_2$?*
   $K_1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont fermés comme toute union finie de fermés et intersection quelconque de fermés. K_1 et K_2 sont bornés donc il existe $r_1, r_2 \geqslant 0$ tels que

$$K_1 \subset B(0, r_1), \quad K_2 \subset B(0, r_2).$$

   Ainsi,

$$K_1 \cup K_2 \subset B(0, \max(r_1, r_2), \quad K_1 \cap K_2 \subset B(0, \in (r_1, r_2)$$

   donc $K1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont bornés.

Exercice 2. *(Cet exercice est un quiz; pour justifier vos réponses donnez des explications succintes (une ou deux phrases), et non pas des démonstrations détaillées)*

Soient

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x < 3, 0 \leqslant y < x+1\},\\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leqslant y \leqslant 3x-2\},\\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, x^2-4x+4 < y \leqslant 2x^2+1\}.
\end{aligned}$$

1. *Représenter graphiquement chacun de ces ensembles.*

2. *Trouver l'adhérence et l'intérieur de chacun de ces ensembles.*

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant x+1\},\\ \bar{B} &= B,\\ \bar{C} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geqslant 0, x^2-4x+4\leqslant y\leqslant 2x^2+1\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^\circ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0< x< 3, 0< y< x+1\},\\ B^\circ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2<y<3x-2\},\\ C^\circ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x> 0, x^2-4x+4< y< 2x^2+1\}.\end{aligned}$$

3. *Donner la liste de ces ensembles qui sont ouverts.*
   Aucun.

4. *Donner la liste de ces ensembles qui sont fermés.*
   B.

5. *Donner la liste de ces ensembles qui sont bornés.*
   A, B.

6. *Donner la liste de ces ensembles qui sont compacts.*
   B.

Exercice 3. *Etudier l'existence des limites suivantes et les calculer si elles existent:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(4x+y)^3}{x^2+y^2},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^5+7y^6}{x^2-y^2}$$

Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{(4x+y)^3}{x^2+y^2}\right| &\leqslant 4^3\frac{||(x,y)||_1^3}{||(x,y)||_2^2}\\ &\leqslant 4^3c^3\frac{||(x,y)||_2^3}{||(x,y)||_2^2} = 4^3c^3||(x,y)||_2\end{aligned}$$

pour une constante $c>0$ selon l'équivalence des normes en dimension finie donc la première limite vaut 0.

Posons

$$f(x,y)=\frac{3x^5+7y^6}{x^2-y^2}.$$

Pour $x \neq 0$, soit $y = bx, b \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$f(x, bx) = \frac{x^5(3 + 7b^6 x)}{x^2(1 - b^2)},$$

cette limite est égale à 0 pour $|b| \neq 1$ et elle n'existe pas si $|b| = 1$. La limite en question n'existe donc pas.

Exercice 4. *Soient a un nombre réel et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x^3 - y^3)/(2x^2 + 5y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. *Montrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.*
   Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est une fraction rationnelle bien définie donc y est continue.

2. *Calculer*
   $$\lim_{y \to 0} f(0, y).$$
   Pour $y \neq 0$,
   $$f(0, y) = -y/5$$
   tend vers 0 lorsque y tend vers 0.

3. *Pour tout nombre réel b, calculer*
   $$\lim_{x \to 0} f(x, bx).$$
   Pour $x \neq 0$,
   $$f(x, bx) = \frac{3 - b^2}{2 + 5b^2} x$$
   tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

4. *Peut-on trouver la valeur $a \in \mathbb{R}$ en sorte que f soit continue en $(0, 0)$? Si oui, indiquer cette valeur.*
   Il faut nécessairement que $a = 0$.

5. *Pour le choix de a de la question précédente, peut-on affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?*
   Pas directement mais pour $(x, y) \neq (0, 0)$,
   $$|f(x, y)| \leqslant \frac{3|x|^3}{2x^2 + 5y^2} + \frac{|y|^3}{2x^2 + 5y^2} \leqslant \frac{3}{2}|x| + \frac{1}{5}|y|$$
   tend vers $0 = f(0, 0)$ lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$.

Exercice 5. *Justifier la différentiabilité des fonctions données sur leur domaine et calculer leur différentielles.*

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^3}{x^2+y^2+2}, \quad g(x,y,z) = \sin(x^2y^3+z) + \cos(y^2z^3+x).$$

f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fraction rationnelle bien définie et g est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ en tant que somme et composée de fonctions différentiables. Pour (x,y,z) dans $\mathbb{R}^2$, un calcul direct assure que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{2xy^3+x^2y-2xy^2-y^3-4x-2y}{(x^2+y^2+2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3x^2y^2+y^4+x^3-2x^2y-xy^2+6y^2+2x}{(x^2+y^2+2)^2}, \\
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= 2\cos(x^2y^3+z)xy^3 - \sin(y^2z^3+x), \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) &= 3\cos(x^2y^3+z)x^2y^2 - 2\sin(y^2z^3+x)yz^3, \\
\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) &= \cos(x^2y^3+z) - 3\sin(y^2z^3+x)y^2z^2
\end{aligned}$$

donc pour (x,y,z) et (h,k,ℓ) dans $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
df_{(x,y)}(h,k) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k, \\
dg_{(x,y,z)}(h,k,\ell) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)h + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)k + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\ell.
\end{aligned}$$

FIN