	ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018 **DS** **Licence** **4TPM113U** **Coloration Mathématique** **06/11/2017** **à 11h30** **Durée : 1h30** Documents et calculatrice non autorisés 1 page Épreuve de Monsieur Guillaume Ricotta	**Collège Sciences et Technologies**

Le barème indiqué est sur 30. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. [Questions de cours ; 7 points=1+1+1+1+1+1+1] *Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, X_0 un point de $\mathbb{R}^2$ et ℓ un nombre réel.*

(1) *Donner une définition de A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
Confer cours.

(2) *Donner une définition de l'intérieur de A.*
Confer cours.

(3) *Donner une définition de A est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*
Confer cours.

(4) *Donner une définition de l'adhérence de A.*
Confer cours.

(5) *Donner une définition de A est compact.*
Confer cours.

(6) *Donner à l'aide de quantificateurs la définition de f admet la limite ℓ en X_0.*
Confer cours.

(7) *Donner une définition de f est continue en X_0.*
Confer cours.

Exercice 2. [Topologie ; 8 points=0,5+1+0,5+1+0,5+0,5+0,5+1+0,5+1+0,5+0,5] *Soient A et B ls sous-sensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, x^2 + 9y^2 \leqslant 1\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leqslant 1\right\}.$$

(1) *Dessiner précisément A.*
A est le domaine du plan de frontière incluse l'ellipse de centre $(0,0)$, de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe $1/3$ contenue dans le demi-plan $x \geqslant 0$.

(2) *Déterminer explicitement l'intérieur de A. Justifier votre réponse.*
Montrons que l'intérieur de A est égal à

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, x^2 + 9y^2 < 1\right\}.$$

C est un ouvert (en tant qu'image réciproque de l'ouvert $]0,+\infty[\times]-\infty,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par l'application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \mapsto (x, x^2+9y^2)$) inclus dans A donc C est inclus dans l'intérieur de A. Montrons l'inclusion réciproque. Soit (x,y) dans l'intérieur de A. En particulier, (x,y) est dans A qui est égal à l'union disjointe

$$C \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, x^2 + 9y^2 = 1\right\}.$$

Il suffit donc de montrer que (x,y) n'appartient pas à l'ensemble

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, x^2 + 9y^2 = 1\right\}.$$

Par l'absurde, (x,y) est dans cet ensemble. Il existe donc $r>0$ tel que

$$B_F((x,y),r/2) \subset B((x,y),r) \subset A.$$

Ceci est une contradiction car $(x+r/2,y)$ est dans $B_F((x,y),r/2)$ mais n'est pas dans A.

(3) *L'ensemble A est-il ouvert ? Justifier votre réponse.*

A n'est pas ouvert car l'intérieur de A n'est pas égal à A.

(4) *Déterminer explicitement l'adhérence de A. Justifier votre réponse.*

Montrons que A est fermé ce qui implique que l'adhérence de A est égal à A. A est égal à l'image réciproque du fermé $[0,+\infty[\times]-\infty,1]$ de $\mathbb{R}^2$ par l'application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y)\mapsto(x,x^2+9y^2)$ donc A est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(5) *L'ensemble A est-il fermé ? Justifier votre réponse.*

Confer question précédente.

(6) *L'ensemble A est-il compact ? Justifier votre réponse.*

A est fermé et A est borné car A est inclus dans la boule euclidienne fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1 donc A est compact.

(7) *Dessiner précisément B.*

B est le domaine du plan de frontière incluse les branches d'hyperbole

— H_1 d'équation $xy=1$ dans le quadrant $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$,
— H_2 d'équation $xy=1$ dans le quadrant $x\leqslant 0$ et $y\leqslant 0$,
— H_3 d'équation $xy=-1$ dans le quadrant $x\geqslant 0$ et $y\leqslant 0$,
— H_4 d'équation $xy=-1$ dans le quadrant $x\leqslant 0$ et $y\geqslant 0$.

(8) *Déterminer explicitement l'intérieur de B. Justifier votre réponse.*

Montrons que l'intérieur de B est égal à

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |xy|<1\right\}.$$

D est un ouvert (en tant qu'image réciproque de l'ouvert $]-\infty,1[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y)\mapsto|xy|$) inclus dans B donc D est inclus dans l'intérieur de B. Montrons l'inclusion réciproque. Soit (x,y) dans l'intérieur de B. En particulier, (x,y) est dans B qui est égal à l'union disjointe

$$D\cup H_1\cup H_2\cup H_3\cup H_4.$$

Il suffit donc de montrer que (x,y) n'appartient pas à l'une de ces quatre branches d'hyperbole. Par l'absurde, (x,y) est dans l'une de ces quatre branches d'hyperbole. Par exemple, $x,y)$ est dans H_1. Il existe donc $r>0$ tel que

$$B_F((x,y),r/2) \subset B((x,y),r) \subset B.$$

Ceci est une contradiction car $(x+r/2,y)$ est dans $B_F((x,y),r/2)$ mais n'est pas dans B.

(9) *L'ensemble B est-il ouvert ? Justifier votre réponse.*

B n'est pas ouvert car l'intérieur de B n'est pas égal à B.

(10) *Déterminer explicitement l'adhérence de B. Justifier votre réponse.*

Montrons que B est fermé ce qui implique que l'adhérence de B est égal à B. B est égal à l'image réciproque du fermé $]-\infty,1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y)\mapsto|xy|$ donc B est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(11) *L'ensemble B est-il fermé ? Justifier votre réponse.*

Confer question précédente.

(12) *L'ensemble B est-il compact ? Justifier votre réponse.*

B n'est pas compact car B n'est pas borné. En effet, $(0,n)$ est une suite de points de B qui tend vers l'infini.

Exercice 3. [Limites ; 8 points=2+2+2+2] *Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{e^{x+2y}}{\cos(x) + y^2 + 2}, \\ f_2(x,y) &= \frac{x^3y + xy^3}{x^2+y^2}, \\ f_3(x,y) &= \frac{xy + x^2 + 3y^2}{x^2+y^2}, \\ f_4(x,y) &= \frac{x^2y^2}{x^4+y^6}, \end{aligned}$$

pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(1) *f_1 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.*

f_1 est une fonction continue en $(0,0)$ en tant que somme, composée, quotient de fonctions continues donc f_1 andmet une limite en $(0,0)$ égale à $f_1(0,0) = 1/3$.

(2) *f_2 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.*

Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f_2(x,y)| \leqslant 2|xy|$$

donc f_2 admet 0 comme limite en $(0,0)$.

(3) *f_3 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.*

f_3 n'admet pas de limite en $(0,0)$ car pour $x \neq 0$,

$$f_3(x,0) = 1 \to_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} 1$$

et

$$f_3(x,x) = 5/2 \to_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} 5/2.$$

(4) *f_4 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.*

f_4 n'admet pas de limite en $(0,0)$ car pour $x \neq 0$,

$$f_4(x,0) = 0 \to_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} 0$$

et

$$f_4(x, x^{2/3}) = \frac{1}{2x^{2/3}} \to_{\substack{x\to 0^+ \\ x\neq 0}} +\infty.$$

Exercice 4. [Continuité ; 7 points=1+2+1+3] *Soient f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(0,0) = 0$, $g(0,0) = (0,0)$ et*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^5 + y^5 + x^2y^3}{x^4+y^4}, \\ g(x,y) &= \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{xy^5}{x^6+y^6} \right) \end{aligned}$$

pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(1) *La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifier votre réponse.*

Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$, f est une fraction rationnelle bien définie donc f y est continue.

(2) *La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier votre réponse.*

Comme d'habitude, posons $L = a = \{(x,y) : y = ax\}$, $a \in \mathbb{R}$, et considérons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in L_a} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^5(1+a^5+a^3)}{x^4(1+a^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+a^5+a^3)}{(1+a^4)} = 0.$$

Ceci laisse supposer que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe et elle est égale à 0. Pour le démontrer, notons que $2AB \leq A^2 + B^2$ pour A, B réels, et (posez $A = x^2, B = y^2$) on a

$$||(x,y)||^4 = (x^2+y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq 2(x^4+y^4).$$

En se rappelant que $|x| \leq ||(x,y)||$ et $|y| \leq ||(x,y)||$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x,y)| \leq \left|\frac{x^5+y^5+x^2y^3}{x^4+y^4}\right| \leq \frac{|x|^5+|y|^5+|x|^2|y|^3}{x^4+y^4} \\ &\leq 2\,\frac{||(x,y)||^5+||(x,y)||^5+||(x,y)||^5}{||(x,y)||^4} \leq \frac{6\,||(x,y)||^5}{||(x,y)||^4} = 6\,||(x,y)|| \to 0. \end{aligned}$$

Donc, la fonction $f(x,y)$ est continue au pt. (0,0), et, par conséquent, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

(3) *La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifier votre réponse.*

Notons g_1 et g_2 les fonctions composantes de g c'est-à-dire les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $g_1(0,0) = 0$, $g_2(0,0) = 0$ et

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \frac{x+y}{x^2+y^2}, \\ g_2(x,y) &= \frac{xy^5}{x^6+y^6} \end{aligned}$$

pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$, g_1 et g_2 sont des fractions rationnelles bien définies donc g_1 et g_2 y sont continues donc g y est continue.

(4) *La fonction g est-elle continue en $(0,0)$? Justifier votre réponse.*

Pour $x \neq 0$,

$$g_1(x,x) = \frac{1}{x} \to_{\substack{x\to 0^+ \\ x\neq 0}} +\infty \neq g_1(0,0)$$

donc g_1 n'est pas continue en $(0,0)$ donc g n'est pas continue en $(0,0)$.