UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
LICENCE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
1er SEMESTRE MISMI

ENSEIGNEMENT DE LA MÉTHODOLOGIE EN MATHÉMATIQUES

Séance n° 1
Objectif : savoir construire un tableau de vérité

En mathématiques, on travaille sur des *objets*, à propos desquels lesquels on écrit des *propositions*.

Exemples : Les nombres entiers, les nombres réels, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des exemples d'objets mathématiques.

Une *proposition logique*, concernant divers objets mathématiques, est un énoncé qui doit être ou bien vrai (ce que l'on note V, ou 1) ou bien faux (ce que l'on note F, ou 0).

Exemples : $''n^2 \geq n$ quand $n \geq 1''$ est une proposition, qui est vraie. "9 est divisible par 4" est fausse.

Les *opérations* les plus courantes sur ces propositions sont les *connecteurs logiques* suivants :

(1) La disjonction logique "ou", notée $\vee$
(2) La conjonction logique "et", notée $\wedge$
(3) L'implication, notée $\Rightarrow$
(4) La négation "non", notée $\neg$
(5) L'équivalence, notée $\Leftrightarrow$

Une opération comprise entre deux propositions définit une nouvelle proposition.

On va définir les opérations précédentes entre deux propositions p et q, en donnant l'ensemble des *valeurs de vérité* de la nouvelle proposition créée, sous la forme d'un tableau. Ce tableau est appelé *table de vérité* de la nouvelle proposition.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Attention :

- Dans le langage courant, "ou" a en général un sens exclusif (fromage "ou" dessert). En mathématiques, le "ou" est toujours "inclusif" : si p et q sont toutes les deux vraies, $p \vee q$ est vraie.
- Si p est fausse, $p \Rightarrow q$ est vraie.

Remarque : $p \Rightarrow q$ se dit aussi parfois "si p, alors q", ou "pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie", ou encore "une condition suffisante pour q est p", ou encore "une condition nécessaire pour p est q".

Une *tautologie* est une proposition qui ne prend que la valeur "vraie". Un tel phénomène permet de définir des règles logiques qui seront utilisées dans les raisonnements conduisant aux énoncés mathématiques (voir séance 2 et 3, par exemple). En effet, si $p \Leftrightarrow q$ est une tautologie, cela veut dire que si on a démontré que p est vraie, on a aussi démontré que q est vraie, et vice versa : si on a démontré que q est vraie, on a aussi démontré que p est vraie.

Exemple important d'utilisation des tables logiques $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$ est une tautologie. Ainsi, **la négation de** $p \Rightarrow q$ **est** $p \wedge (\neg q)$**, c'est-à-dire** p **et non** q. En effet :

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q})$	$\neg q$	$\mathbf{p} \wedge (\neg \mathbf{q})$	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$
0	0	1	**0**	1	**0**	1
0	1	1	**0**	0	**0**	1
1	0	0	**1**	1	**1**	1
1	1	1	**0**	0	**0**	1

EXERCICES.

(1) La proposition "$2 = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$" est-elle vraie ou fausse ? Et la proposition "$1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 = 3$" ?

(2) Construire les tableaux de vérité des propositions suivantes. Dire le cas échéant, s'il s'agit d'une tautologie ou non. p, q, r, s et t désignent des propositions.
  (a) $(p \vee q)$, puis $(q \vee p)$. Comparer les résultats obtenus.
  (b) $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$.
  (c) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
  (d) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Comparer le résultat obtenu avec le tableau de vérité de $p \Leftrightarrow q$.
  (e) $\neg(p \wedge q)$, puis $(\neg p) \vee (\neg q)$. Comparer les résultats obtenus.
  (f) $\neg(p \vee q)$, puis $(\neg p) \wedge (\neg q)$. Comparer les résultats obtenus.
  (g) $p \vee (\neg p)$ (**principe du tiers exclu**).
  (h) $(\neg p) \vee q$. Comparer le résultat obtenu avec le tableau de vérité de $p \Rightarrow q$.
  (i) $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$. Comparer le résultat obtenu avec le tableau de vérité de $p \Rightarrow q$ (**principe de contraposition**).
  (j) $((r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow t)) \Rightarrow (r \Rightarrow t)$ (**principe de transitivité de l'implication**).
  (k) $(r \Rightarrow s) \Rightarrow ((r \wedge t) \Rightarrow (s \wedge t))$.

(3) P, Q et R désignent trois propositions logiques.
  (a) Construire les tables de vérité suivantes :
    (i) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
    (ii) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$
    (iii) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg(P \Rightarrow \neg Q))$
  (b) Exprimer sans $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$:
    (i) $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
    (ii) $\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q)$
    (iii) $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

(4) Exprimer les phrases suivantes à l'aide de propositions reliées par des connecteurs logiques :
  (a) "Si le papier devient rouge, la solution est acide."
  (b) "Le papier devient rouge si la solution est acide."
  (c) "Vous aurez une chambre à condition que vous n'ayez pas de chien." Quelle est la négation logique de cette proposition ?
  (d) "S'il y a du cobalt mais pas de nickel dans la solution, le papier deviendra brun". Quelle est la négation logique de cette proposition ?

(5) Quelle(s) proposition(s) peut-on déduire de l'énoncé suivant : "S'il pleut le matin, je prends mon parapluie"?
  (a) "J'ai pris mon parapluie, donc il a plu ce matin".
  (b) "Je n'ai pas pris mon parapluie, donc il ne pleuvait pas ce matin".
  (c) "Il a fait beau, donc je n'ai pas pris mon parapluie".

(6) Dans un journal est annoncée la nouvelle suivante :

L'armée ne quittera pas le pays tant que le calme n'est pas revenu.

En considérant l'annonce officielle précédente, dire si les énoncés suivantes sont vrais :
  (a) " Le calme est revenu, donc l'armée quitte le pays. "
  (b) " L'armée quitte le pays, donc le calme est revenu. "
  (c) " L'armée n'a pas quitté le pays, donc le calme n'est pas revenu."

(7) Le roi à Chimène: “Si Don Rodrigue a tué ton père, c’est qu’il avait bu ou qu’il faisait nuit. S’il faisait nuit, alors, s’il avait bu, il devait chanter. Or il ne sait pas chanter. Donc il n’a pas tué ton père.”

Exprimer chaque phrase avec des connecteurs logiques. Si on suppose les trois premières phrases vraies, peut-on bien en déduire la dernière ?

(8) Dans un QCM, 5 réponses sont possibles, notées A, B, C, D et E. Une seule est vraie. Un candidat remarque trois choses : (1) si B est vraie, alors E aussi. (2) Si A est vraie, alors au moins l’une des deux affirmations B ou D est vraie. (3) D est fausse si et seulement si E est vraie. Que peut-il en déduire ? Peut-il répondre avec certitude à la question ?

(9) Dire si l’on peut remplacer TRALALA par “nécessaire”, “suffisante” ou “nécessaire et suffisante” dans les phrases ci-dessous :
   (a) Avoir au moins 18 ans est une condition TRALALA pour voter en France.
   (b) Avoir 10 à toutes les matières est une condition TRALALA pour avoir le baccalauréat.
   (c) $x = 1$ est une condition TRALALA pour que $x^2 = x$.
   (d) $x > 0$ est une condition TRALALA pour que $\frac{1}{x} > 1$.
   (e) $|x| = 1$ est une condition TRALALA pour que $x^2 = 1$.

Séance n° 2
Objectifs : savoir nier et traduire des formules avec quantificateurs

En mathématiques, un grand nombre de propositions s'expriment en fonction d'une ou plusieurs variables.

Exemples : $x + y \geq 1$. Ici les variables x et y peuvent représenter des nombres réels, ou bien des entiers. Suivant l'interprétation des variables x et y, la proposition peut être vraie ou fausse. On choisira d'appeler *formules* de telles propositions.

Soit $p(x)$ une formule dépendant de la variable x, on définit deux nouvelles propositions, à l'aide des *quantificateurs* $\forall$ et $\exists$:

(1) $\forall x,\ p(x)$: "pour tout x, on a $p(x)$"
(2) $\exists x,\ p(x)$: "il existe x, tel que $p(x)$"

La première est vraie, si la proposition $p(x)$ est vraie *pour tous* les x. Alors que la seconde est vraie, s'*il existe (au moins) un* x pour lequel $p(x)$ est vraie.

Il est important de signaler que les variables sont muettes : $\forall x,\ p(x)$ et $\forall y,\ p(y)$ désignent la même proposition. D'autre part, il est toujours nécessaire de préciser le *domaine d'interprétation* de telles formules, c'est-à-dire l'ensemble dans lequel peuvent varier les variables, pour en étudier les valeurs de vérité.

Exemples : considérons les propositions $(\exists x, x \geq 1)$ et $(\forall x, x \geq 1)$, que l'on interprète dans l'ensemble des nombres entiers naturels. Par définition, la première signifie "il existe un entier naturel plus grand que 1". Il est évident qu'un tel énoncé est vrai. A contrario, la seconde est fausse puisqu'elle signifie que "tous les entiers naturels sont plus grands que 1" (mais $0 < 1$!). Si l'on interprète la première dans l'ensemble des nombres entiers négatifs, il est clair qu'elle est fausse (dans ce domaine d'interprétation).

On précise en général le domaine d'interprétation E en écrivant "$\forall x \in E, p(x)$", ou "$\exists x \in E, p(x)$". (Par convention, si E est vide, $\forall x \in E, p(x)$ est vraie). Si E a un nombre fini d'éléments $\{x_1, \ldots, x_n\}$. on peut remarquer que "$\forall x \in E, p(x)$" peut aussi s'écrire "$p(x_1)$ et $p(x_2) \ldots$ et $p(x_n)$"; de même "$\exists x \in E, p(x)$" peut s'écrire "$p(x_1)$ ou $p(x_2) \ldots$ ou $p(x_n)$".

L'équivalence ci-dessous est une tautologie; elle permet d'exprimer les négations des propositions comportant des quantificateurs.

$$\neg(\forall x,\ p(x)) \Leftrightarrow (\exists x,\ \neg(p(x)))$$

Attention, le domaine d'interprétation est le même des deux côtés : par exemple, la négation de "$\forall x \in \mathbf{N}, x > 3$" s'écrit "$\exists x \in \mathbf{N}, x \leq 3$".

Remarque : Pour montrer que "$\exists x \in E, p(x)$" est vraie, il suffit de trouver un x particulier pour lequel $p(x)$ est vraie. Pour montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" est vraie, un tel *exemple* ne suffit pas. Enfin, montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" est fausse revient à montrer que "$\exists x \in E, \neg p(x)$" est vraie, donc il suffit de trouver un *contre-exemple*, c'est-à-dire un x pour lequel $p(x)$ est fausse.

EXERCICES.

(1) Trouver les relations logiques entre les énoncés suivants.
  (a) Tous les hommes sont mortels
  (b) Tous les hommes sont immortels
  (c) Aucun homme n'est mortel
  (d) Aucun homme n'est immortel
  (e) Il existe un homme immortel
  (f) Il existe un homme mortel

(2) On note C l'ensemble des chatons, $M(c)$ la formule "c est moustachu", $P(c)$ la formule "c aime le poisson" et $S(c)$ la formule "c a peur des souris". Écrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs.
  1. Les chatons moustachus aiment toujours le poisson.
  2. Il est faux que tous les chatons qui aiment le poisson soient moustachus.
  3. Aucun chaton qui aime le poisson n'a peur des souris.

4. Les chatons sont moustachus ou ont peur des souris.
5. Les chatons qui ont peur des souris ne sont pas moustachus.

On suppose vraies les phrases 1,2 et 3. Faire un schéma représentant l'ensemble des chatons, et les trois sous-ensembles pour lesquels M, P et S sont respectivement vraies. Que peut-on dire de la phrase 4 ? De la phrase 5 ?

(3) On note H l'ensemble des hommes. On propose les deux écritures suivantes pour la phrase "Tous les hommes sont heureux et sages" : "$\forall x \in H$, (x est heureux $\wedge$ x est sage)" et "($\forall x \in H$, x est heureux) $\wedge$ ($\forall x \in H$, x est sage)". Correspondent-elles toutes les deux à la première phrase ?

Même question avec "Les hommes heureux sont sages" et
- "$\forall x \in H$, (x est heureux $\Rightarrow$ x est sage)"
- "($\forall x \in H$, x est heureux) $\Rightarrow$ ($\forall x \in H$, x est sage)."

Même question avec "Il existe un homme heureux et sage" et
- "($\exists x \in H$, x est heureux) $\wedge$($\exists x \in H$, x est sage)."
- "$\exists x \in H$, (x est heureux $\wedge$ x est sage)."

Même question avec "Tous les hommes ne sont pas heureux"
- "$\forall x \in H$, $\neg$(x est heureux)"
- "$\exists x \in H$, $\neg$(x est heureux"
- "$\neg$($\forall x \in H$, x est heureux)"

(4) Soit F l'ensemble des Français. On note, pour un élément x de F,
$P(x)$, la propriété " x est brun ",
$Q(x)$, la propriété " x est grand ".
Répondre aux questions suivantes :
(a) Sous la forme d'un schéma, représenter dans F l'ensemble des éléments de F pour lesquels $P(x)$ est vraie, puis l'ensemble des éléments de F pour lesquels $Q(x)$ est vraie.
(b) Considérons les propositions suivantes :

$$(\forall x \in F)(P(x) \text{ ou } Q(x))$$

et

$$(\forall x \in F,\ P(x)) \text{ ou } (\forall x \in F,\ Q(x))$$

Dire si ces deux propositions sont vraies ou fausses dans notre cas de figure. Représenter dans F comment on verrait le fait que ces propositions soient vraies. Sont-elles équivalentes ? Rechercher éventuellement les relations logiques qui les lient.

(5) Soit E un ensemble non vide. On note $P(x)$ et $Q(x)$ deux formules. Considérons les propositions suivantes :
$(\exists x \in E,\ P(x) \text{ et } Q(x))$
$(\exists x \in E,\ P(x)) \text{ et } (\exists x \in E,\ Q(x))$
Répondre aux questions suivantes :
(a) Dans le cas où l'on interprète les formules dans l'ensemble E des pions d'un jeu d'échec, pour $P(x)$ signifiant "x est noir " et $Q(x)$ "x est blanc", exprimer en français les deux propositions ci-dessus. Indiquer si elles vous semblent, dans ce cas particulier, vraies ou fausses.
(b) Écrire la négation des deux propositions.
(c) Indiquer les relations logiques qui lient les deux propositions.

(6) Écrire les négations logiques des propositions suivantes :
(a) " Tous les hommes sont mortels. "
(b) " Tout intervalle de $\mathbf{R}$ contient un élément de l'intervalle $[0, 1]$."
(c) $\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{Z},\ p \geq n$
(d) $(x^2 \geq 1 \wedge x^3 < 2) \vee (x^2 \leq 9 \wedge x < 0)$
(e) $\forall x \in \mathbf{R}, x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$.

(7) Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. La définition de $A \subset B$ est "tout élément de A est élément de B". A quelle(s) proposition(s) ci-dessous cela correspond-il ?
- $\forall x \in A, x \in B$

- $\forall x \in E, (x \in B \Rightarrow x \in A)$
- $\forall y \in E, (y \in A \Rightarrow y \in B)$
- $(\forall x \in E, x \in A) \Rightarrow (\forall x \in E, x \in B)$

(8) Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la définition de “f est une fonction bornée” est “$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$”. Donner la définition de “f n’est pas une fonction bornée”.

La définition de “f est une fonction croissante” est
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Donner la définition de “f n’est pas croissante”.

(9) On considère la fonction f de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{-1, 3, 5\}$ définie par $f(0) = 3$, $f(1) = -1$ et $f(2) = 3$.

Pour chacune des propositions suivantes, donner sa négation, et dire si elle est vraie ou fausse.

(a) $\forall i \in \{0, 1, 2\}, f(i) \geq 0$
(b) $\exists i \in \{0, 1, 2\}, f(i) \geq 0$
(c) $\forall j \in \{-1, 3, 5\}, \exists i \in \{0, 1, 2\}, f(i) = j$
(d) $\forall j \in \{-1, 3\}, \exists i \in \{0, 1, 2\}, f(i) = j$
(e) $\exists j \in \{-1, 3, 5\}, \forall i \in \{0, 1, 2\}, f(i) = j$.

(10) Pour chacune des propositions suivantes, donner sa négation, et dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant la réponse)

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$
(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
(c) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$
(e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
(f) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y = 0)$. Y a-t-il une différence entre les deux derniers énoncés ? Si oui, l’expliciter.
(g) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x \geq y$
(h) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq y$
(i) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x \geq y$

(11) Écrire sous la forme d’une formule avec quantificateurs les énoncés suivants :

(a) Tout entier naturel possède une racine carrée réelle.
(b) Tout entier naturel possède un réel positif plus grand que lui.
(c) Il existe un réel plus petit que tous les entiers.
(d) L’intervalle I est inclus dans $[1, 2]$.

Séance n° 3
Objectif : savoir rédiger une démonstration par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est un principe de démontration. Il est fondé sur le principe logique du *tiers exclus* (voir séance 1). Ce principe affirme que

$$p \vee \neg(p)$$

est une tautologie.

Il existe plusieurs modèles de démonstrations par l'absurde. Nous pouvons énoncer son principe général de la manière suivante :

Principe : Supposons que l'on veuille prouver que la proposition p est vraie. On suppose que $\neg(p)$ est vraie (ou que p est fausse), et l'on exhibe (en utilisant notre système d'axiomes et/ou les règles de déduction logique) une contradiction. On en conclut donc que l'hypothèse faite sur p est fausse, donc p est vraie.

Exemple : On suppose connu que tout entier possède au moins un diviseur premier. Montrons par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers. Supposons que cette proposition est fausse, i.e. il existe un nombre fini de nombres premiers, disons $p_1, \ldots, p_n$. Alors l'entier $p := (p_1 \times \ldots \times p_n + 1)$ n'est divisible par aucun des p_i. Or il a au moins un diviseur premier. Ainsi il y a contradiction. La proposition initiale est donc valide.

EXERCICES.

(1) Lire attentivement la démonstration suivante :

Supposons qu'il existe deux entiers (naturels) p, $q \neq 0$ tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

On peut supposer que p et q sont premiers entre eux. En élevant au carré et en multipliant par q^2, on obtient :

$$2q^2 = p^2$$

On en déduit que p^2 est pair. Donc p est pair. Par définition, il existe donc un entier (naturel, non nul) r tel que

$$p = 2r$$

Par suite,

$$q^2 = 2r^2$$

Donc q^2 est pair et q aussi. Ceci contredit l'hypothèse. Le résultat en découle.

   (a) Énoncer le "résultat" que démontre la preuve ci-dessus.
   (b) Quelle méthode de démonstration a-t-on utilisée pour prouver ce résultat ?
   (c) Dans le texte, à quelle "hypothèse" l'auteur fait-il allusion ? Expliciter la contradiction.

(2) Montrer par l'absurde que 0 n'est pas racine de $x^4 + 12x - 1$.

(3) Démontrer la propriété suivante par l'absurde :

" Tout entier de carré impair est impair "

(4) Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.
   (a) Alice et Bob sont deux habitants de cette île. Alice déclare "L'un d'entre nous deux au moins est un menteur". Montrer par l'absurde que Alice est sincère. Qu'en est-il de Bob ?
   (b) Chloe et Denis sont deux autres habitants. Chloe déclare "Je suis menteuse ou Denis est sincère". Montrer par l'absurde que Chloe est sincère. Qu'en est-il de Denis ?

(c) Gaspard, Melchior et Balthazar sont trois habitants. Gaspard déclare : “Nous sommes tous menteurs”. Melchior dit : “Un et un seul d’entre nous est sincère”. Montrer par l’absurde que Gaspard est un menteur, puis que Melchior est sincère. Qu’en est-il de Balthazar ?

(5) A la question “A-t-on $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - x + 9} \leq \sqrt{x^2 + x + 4}$?”, Dominique fournit le raisonnement suivant :
Soit x un réel. Si $\sqrt{x^2 - x + 9} \leq \sqrt{x^2 + x + 4}$, alors $x^2 - x + 9 \leq x^2 + x + 4$, donc $-2x + 5 \leq 0$, ce qui est faux. Donc la proposition est fausse.
Ce raisonnement est-il correct ?

(6) Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n + 1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0, 1]$, vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut montrer par l’absurde la propriété suivante :

” Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$ “. $(\mathcal{P})$

(a) Écrire la propriété $(\mathcal{P})$ à l’aide de quantificateurs.
(b) Écrire à l’aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété $(\mathcal{P})$.
(c) Écrire la négation de cette formule logique. Déduire en supposant celle-ci que $x_n - x_0 > 1$.
(d) Rédiger proprement une démonstration par l’absurde de la propriété $(\mathcal{P})$.

(7) *Le but de cet exercice est de démontrer par l’absurde la propriété suivante :*

$$\text{“ } (A \Delta B = \emptyset) \Rightarrow (A \subset B) \text{”}$$

pour deux parties (non vides) A et B d’un ensemble F.

(a) Écrire la négation de la proposition

$$\forall x \in A,\ x \in B$$

(b) La partie $A\Delta B$ de F est formée des éléments de A qui n’appartiennent pas à B et des éléments de B qui n’appartiennent pas à A. Rédiger une démonstration par l’absurde de la propriété de l’énoncé.

(8) Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E. On suppose que $A \cup B \cup C = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A)$. Montrer par l’absurde que $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Séance n° 4
Objectif : savoir rédiger une démonstration par la contraposée

Le raisonnement par contraposée est un principe de démonstration. Il s'appuie sur le principe logique de *contraposition* (voir séance 1). Ce principe peut s'écrire de la manière suivante :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

et s'énoncer ainsi :

Principe : Soient p et q deux propositions. Supposons que l'on veuille prouver que la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie. Le principe de contraposition assure qu'il est équivalent de démontrer que la proposition $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$, que l'on appelle la *contraposée* de $p \Rightarrow q$, est vraie.

Exemple : Soit $x = p/q$ un nombre rationnel non nul ($pq \neq 0$). Nous allons montrer par contraposée que

$$y \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q} \Rightarrow xy \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$$

Supposons, en effet, que $xy = a/b$ (avec $b \neq 0$), on a $y = q/p \times a/b$, soit $y = (aq)/(bp)$. Ceci prouve que $y \in \mathbf{Q}$. Le principe de contraposition assure que l'implication originelle est vraie.

Attention : Ne pas confondre la contraposée de $p \Rightarrow q$, qui est $\neg q \Rightarrow \neg p$, avec sa *réciproque* "$q \Rightarrow p$". La contraposée est équivalente à la proposition de départ, la réciproque ne l'est en général pas.

EXERCICES.

(1) Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'implication suivante :

" Si n^2 est impair, alors n est impair."

A-t-on démontré l'implication ?

(2) Écrire les réciproques et les contraposées des implications suivantes :
   (a) " Si tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel. "
   (b) " Si les nombres réels x et y sont différents, alors les nombres réels $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents. "
   (c) $(\forall \varepsilon > 0,\ |f(x)| < \varepsilon) \Rightarrow (f(x) = 0)$

(3) Soit x un réel. Montrer par contraposition "$x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$".

(4) Écrire la proposition suivante sous la forme d'une implication, et la démontrer par contraposition :

" Tout entier supérieur à 3 et premier est impair "

(5) *Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour* $n \in \mathbf{N}^*$ *:*

" Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair "

   (a) Écrire la propriété ci-dessus sous la forme d'une formule mathématique.
   (b) Écrire la contraposée de la formule donnée à la question 1).
   (c) En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, avec $k \in \mathbf{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver que la formule de la question 2) est vraie.
   (d) A-t-on démontré la propriété de l'énoncé?

(6) On demande à un étudiant de prouver l'énoncé suivant :

Montrer que l'entier $n = \sharp\sharp\sharp$ est pair.

La valeur de l'entier n a été masquée car elle n'a pas d'importance. Voici la réponse de l'étudiant :

Pour qu'un entier soit pair, il faut qu'il soit divisible par deux.
Cet entier n est divisible par 2, donc il est pair.

   (a) Même si tous les arguments sont justes, le raisonnement n'est pas correct. Pourquoi ?

(b) Réécrire la réponse en changeant respectivement les expressions " entier ", " être pair " et " être divisible par deux " par " fromage ", "être du gruyère" et "avoir des trous ". Que se passe-t-il ?

(c) Proposer une réponse à l'énoncé, sans faute de raisonnement.

(d) Analyser pourquoi ce qui est troublant avec les entiers est évident avec les fromages.

Séance n° 5
Objectif : savoir rédiger une démonstration par récurrence

Le principe de raisonnement par récurrence, basé sur les propriétés des entiers (ce sera vu en cours de mathématiques), s'énonce de la manière suivante :

Soient $p(n)$ une proposition définie en fonction de l'entier naturel n, et n_0 un entier naturel fixé. Alors la proposition

$$(p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0,\ p(n) \Rightarrow p(n+1))) \Rightarrow (\forall n \geq n_0,\ p(n))$$

est une tautologie.

Principe : Pour démontrer $\forall n \geq n_0,\ p(n)$ par récurrence sur n, on commence par vérifier que $p(n_0)$ est vraie (étape d'initialisation). On montre ensuite que la propriété est *héréditaire* : on suppose que $p(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$, quelconque, et on montre qu'alors $p(n+1)$ est vraie.

Exemple. Démontrons par récurrence la proposition $\forall n \in \mathbf{N}\backslash\{0\},\ n^2 \geq 1$. Grâce au principe de récurrence, on va montrer :

Initialisation : $1 \geq 1$

Hérédité : supposons que $n^2 \geq 1$ (c'est l'hypothèse de récurrence), on va montrer que cela implique que $(n+1)^2 \geq 1$. On a

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

et

$$2n + 1 \geq 0$$

puisque $n \geq 1$. Et l'hypothèse de récurrence entraîne que

$$n^2 + 2n + 1 \geq 1$$

En vertu du principe de récurrence, on a bien montré que

$$\forall n \in \mathbf{N}\backslash\{0\},\ n^2 \geq 1$$

Remarque :

- Ne pas oublier l'étape d'initialisation !
- L'hérédité consiste à montrer $\forall n \geq n_0, (p(n) \Rightarrow p(n+1))$, et pas à montrer $(\forall n \geq n_0, p(n)) \Rightarrow p(n+1)$ (qui n'a pas de sens, car le n du membre de droite de l'implication n'est défini nulle part), ni $(\forall n \geq n_0, p(n)) \Rightarrow (\forall n \geq n_0, p(n+1))$ (qui est toujours vrai).
- Le principe de récurrence ne marche pas pour $\mathbb{R}$. Il peut marcher pour $\mathbf{Z}$, en faisant une démonstration "montante" et une "descendante".
- On doit parfois effectuer une récurrence portant sur deux termes : si on montre que $p(0)$ et $p(1)$ sont vraies (initialisation) et que pour tout entier $n \geq 0$ ($p(n)$ et $p(n+1)) \Rightarrow p(n+2)$ (hérédité), on a alors montré $\forall n \geq 0, p(n)$. (Il suffit d'appliquer le principe de récurrence à $q(n) = (p(n)$ et $p(n+1))$.
- Parfois on aurait besoin d'appliquer l'hypothèse de récurrence non pas à $p(n)$ mais à $p(k)$ où $k \leq n$ est inconnu : on utilise alors le *principe de récurrence généralisée* : si $p(0)$ est vraie, et si, pour tout entier $n \geq 0$, la vérité de toutes les propositions $p(0)$, $p(1)$,...,$p(n)$ entraîne celle de $p(n+1)$, alors la proposition $p(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

EXERCICES.

(1) Pour $n \in \mathbf{N}$ on considère la propriété suivante :

$$P_n : \quad 2^n > n^2$$

1. Montrer que l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ? On utilisera un raisonnement par récurrence.

(2) Soient P_n la propriété "9 divise $10^n - 1$" et Q_n la propriété "9 divise $10^n + 1$".

(a) Montrer que si n est un entier, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ (on pourra utiliser $10^{n+1} = 10^n.(9+1)$)

(b) "$\forall n \in \mathbf{N}, P_n$" est-elle vraie ? Et "$\forall n \in \mathbf{N}, Q_n$" ?

(3) *Le but de cet exercice est de prouver par récurrence la formule suivante, pour tout réel $q \neq 1$,*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(a) Sur quoi va porter la récurrence ?

(b) Énoncer la propriété à démontrer.

(c) Énoncer l'hypothèse de récurrence.

(d) Énoncer précisément la propriété d'hérédité de cette récurrence.

(e) Vérifier la formule

$$\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

(f) Rédiger la démonstration.

(4) Lire attentivement la "démonstration" suivante de la propriété :

Tous les crayons d'une boîte B sont de la même couleur

Démonstration : Soit B une boîte de crayons de couleurs. Si cette boîte contient un crayon, le résultat est vrai. Supposons que le résultat est vrai si B a $n-1$ crayons. Si B a n crayons, en retirant un crayon, on obtient une boîte B' qui possède $n-1$ crayons. Tous les crayons de B' ont donc la même couleur. Remettons le crayon dans B et enlevons un autre crayon de B. On obtient ainsi une nouvelle boîte B, dont tous les crayons sont à nouveau de la même couleur. Maintenant comme des crayons appartiennent B et B', tous les crayons de B sont de la même couleur.

(a) La propriété ci-dessus vous semble-t-elle vraie? La démonstration vous semble-t-elle valide?

(b) De quelle type de démonstration s'agit-il?

(c) Expliquer précisément où se situe l'erreur de raisonnement. Peut-on espérer rectifier la preuve?

(5) Voici une "démonstration" de la propriété "Tout entier n supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier". (On rappelle qu'un nombre premier est un entier différent de 1 qui n'est divisible que par lui-même et par 1).

On note $P(n)$ la proposition "n possède un diviseur premier".
La propriété est vraie pour $n = 2$ puisque 2 divise 2, et 2 est premier.
On suppose que $P(n)$ est vraie (Hypothèse de récurrence). Si $n+1$ est premier, puisque $n+1$ est divisible par lui-même, $P(n+1)$ est vraie. Si $n+1$ n'est pas premier, il admet un diviseur d qui est strictement plus petit que $n+1$ et à qui on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. Donc d admet un diviseur premier p. Comme p divise aussi $n+1$, $P(n+1)$ est vraie.
La propriété est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 2.

(a) De quel type de démonstration s'agit-il ?

(b) Quelle est l'hypothèse de récurrence ? Comment est-elle appliquée ? Cela vous semble-t-il correct ?

(c) Voyez-vous comment modifier l'hypothèse de récurrence pour rendre la démonstration correcte ?

(6) Voici une "démonstration" qui montre que tout groupe de n personnes contenant au moins un homme ne contient que des hommes.

On note P_n la propriété : "tout groupe formé de n personnes ou moins, et contenant au moins un homme, ne contient que des hommes". P_1 est de toute évidence vraie. Supposons que P_n soit vraie. On considère un groupe formé de $n+1$ personnes, et contenant au moins un homme. On découpe alors le groupe en deux sous-groupes contenant chacun moins (au sens large) de n personnes. L'un des deux sous-groupes au moins contient donc un homme. Par hypothèse de récurrence, il ne contient que des hommes. Maintenant on prend un homme dans ce sous-groupe, on le rajoute à l'autre sous-groupe, qui contient maintenant au moins un homme. On peut donc appliquer à nouveau l'hypothèse de récurrence, et ce sous-groupe ne contient que des hommes. Donc les deux sous-groupes ne contiennent que des hommes, et donc P_{n+1} est vérifiée. La propriété est héréditaire, et elle est donc démontrée.

Voyez-vous la faille dans cette démonstration ?

(7) On souhaite montrer par récurrence que pour tout entier n et pour tout réel $x > 0$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
   (a) La récurrence porte-t-elle sur n ? Sur x ? Sur les deux ?
   (b) A quel rang commence la récurrence ?
   (c) Énoncer l'hypothèse de récurrence.
   (d) Énoncer la propriété d'hérédité de la récurrence.
   (e) Vérifier $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbf{N}, (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$.
   (f) Rédiger la démonstration par récurrence.

(8) Montrer par récurrence $\forall n \in N^*$, $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$. En déduire $\forall n \in N^*, \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = n$.

(9) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $9^n - 1$ est divisible par 8.

(10) On définit les *nombres harmoniques* H_n pour $n \geq 1$ par $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Démontrer la propriété suivante par récurrence :

$$\text{“ Pour tout } n \geq 1, \text{ on a la relation } \sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n \text{ ”}$$

(11) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$