DS DU 19 NOVEMBRE 2011 (9H30 À 10H50)

*Toutes les réponses doivent être argumentées.***Exercice 1.**1) a) Calculer l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$. (On pourra poser $t = \sqrt{x}$.)b) L'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ est-elle absolument convergente ? Est-elle convergente ?

2) Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

a) $\int_0^1 \frac{e^{-x} \ln(1+x)}{x} dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} \ln(1+x)}{x} dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \ln(1+x)}{x} dx$ *Nota Bene : Dans les questions 1-b et 2, aucun calcul d'intégrale n'est attendu.***Exercice 2.**1) Déterminer les réels a, b, c et d tels que

$$\frac{10}{(p^2+1)(p+2)(p+3)} = \frac{ap+b}{p^2+1} + \frac{c}{p+2} + \frac{d}{p+3}$$

2) Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la fonction $t \rightarrow y(t)$ solution de

$$\forall t > 0 \quad \begin{cases} y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 10 \sin t \\ y(0^+) = y'(0^+) = 0 \end{cases}$$

3) Montrer que cette solution peut se mettre sous la forme

 $y(t) = A \sin(t - \pi/4) + \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$, où A est une constante à déterminer.**Exercice 3.**Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la solution $t \rightarrow (x(t), y(t))$ du système différentiel

$$\forall t > 0 \quad \begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

qui vérifie les conditions $x(0^+) = 1$ et $y(0^+) = 0$?Quelle est la limite de $(x(t), y(t))$ quand t tend vers l'infini ?

Tables de correspondance entre une fonction $t \rightarrow f(t)$ et sa transformée de Laplace $s \rightarrow F(s)$

$f(t)$	$F(s)$
1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n (n entier positif)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t^n, n \in \mathbb{R}, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{(s+a)^n}, n$ entier positif	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$
$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t)$
$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} (e^{at} - e^{-at})$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{2} (e^{at} + e^{-at})$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)},$ si $a \neq b$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{s}{(s+a)(s+b)},$ si $a \neq b$	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))$
$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t)$
$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t))$
$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$
$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin(\omega t))$
$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \beta^2)},$ si $\omega^2 \neq \beta^2$	$\frac{1}{\beta^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\beta t))$
$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \beta^2)},$ si $\omega^2 \neq \beta^2$	$\frac{1}{\beta\omega(\beta^2 - \omega^2)} (\beta \sin(\omega t) - \omega \sin(\beta t))$