Toutes les réponses doivent être argumentées.

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale, et, dans le cas où l'intégrale converge, en donner la valeur.

- a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$
 b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \ln(1+2x^2)}{x^3} dx$
 c) $\int_0^{+\infty} (2x^2 - 1) x e^{-x^2} dx$

Exercice 2. On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+\sqrt{x}} dx$, où a désigne un réel strictement positif arbitraire.

- 1) Cette intégrale est-elle convergente ? (On pourra utiliser une intégration par parties.)
 2) a) Justifier que pour tout réel x , $|\cos ax| \geq \frac{1 + \cos 2ax}{2}$. (On pourra utiliser une formule connue de trigonométrie pour transformer le second membre de l'inégalité.)
 b) En s'aidant des résultats précédents, étudier la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+\sqrt{x}} dx$.

Exercice 3. On considère une fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur $[1, +\infty[$. On suppose que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

Il pourra être utile par la suite de remarquer que $F(1) = 0$ et que pour tout $x > 1$, $F'(x) = f(x)$.

- 1) a) Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, quel que soit $x \geq 1$, $|F(x)| \leq M$. (On rappelle que toute fonction continue sur $[1, +\infty[$ qui tend vers une limite réelle en $+\infty$ est bornée.)
 b) Soit $s > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} F(t) e^{-st} dt$ converge.
 c) Donner une majoration de $|\int_1^{+\infty} F(t) e^{-st} dt|$ en fonction de M et s .
 2) a) En utilisant une intégration par parties et le résultat 1-b, étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$.
 b) On pose $g(s) = \int_1^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$. Que peut-on dire de la limite de $g(s)$ quand $s \rightarrow +\infty$?

Barème indicatif :

Exercice 1 (7 points), Exercice 2 (7 points), Exercice 3 (6 points)