M1PY3W01

CORRIGÉ DU DS DU 6 NOVEMBRE 2012 (9H30 À 10H50)

Toutes les réponses doivent être argumentées.

Exercice 1. a) $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{(x-1)\,(x+2)}\,dx$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{(x-1)\,(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

Pour $X > 2$, on a donc

$$\int_2^X \frac{1}{(x-1)\,(x+2)}\,dx = \int_2^X \frac{1}{3(x-1)}\,dx - \int_2^X \frac{1}{3(x+2)}\,dx = \frac{1}{3}\ln(\frac{X-1}{X+2}) + \frac{\ln 4}{3}$$

Quand X tend vers l'infini, $\ln(\dfrac{X-1}{X+2})$ tend vers $\ln 1 = 0$. Donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{(x-1)\,(x+2)}\,dx$ converge, et vaut $\dfrac{\ln 4}{3}$.

b)$\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}\,\ln(1+2x^2)}{x^3}\,dx$

Posons $f(x) = \dfrac{e^{-x}\,\ln(1+2x^2)}{x^3}$. f est positive ou nulle, équivalente à $\dfrac{2}{x}$ quand x tend vers 0. Comme l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{x}\,dx$ est divergente, par le théorème de comparaison, il en est de même de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$, et donc de $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

c) $\int_0^{+\infty} (2x^2-1)\,x\,e^{-x^2}dx$

Calculons $F(X) = \int_0^X x\,(2x^2-1)\,e^{-x^2}dx$.

Effectuons le changement de variables $t = x^2$: $F(X) = \int_0^{X^2} (t-1/2)\,e^{-t}dt$.

Intègrons par parties : $F(X) = \int_0^{X^2} e^{-t}dt - [(t-1/2)\,e^{-t}]_0^{X^2} = [-e^{-t}(t+1/2)]_0^{X^2}$.

Donc $\lim_{X\to+\infty} F(X) = \lim_{Y\to+\infty}[-e^{-t}(t+1/2)]_0^Y = 1/2$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\,(2x^2-1)\,e^{-x^2}dx$ converge et vaut $1/2$.

Exercice 2.

On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos ax}{1+\sqrt{x}}\,dx$, où a désigne un réel strictement positif arbitraire.

1) Pour $X > 0$,

$$\int_0^X \frac{\cos ax}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^X \frac{\sin ax}{a}\,\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx + [\frac{\sin ax}{a(1+\sqrt{x})}]_0^X$$

- Le deuxième terme de cette somme tend vers 0 quand $X \to +\infty$.

- On a $|\dfrac{\sin ax}{a}\,\dfrac{2}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}| \leq \dfrac{1}{2a\,x^{3/2}}$ pour tout $x \geq 0$. De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{3/2}}$ converge. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{a}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx$ est absolument convergente, et donc convergente.

En regroupant ces deux propriétés, on conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos ax}{1+\sqrt{x}}\,dx$ converge.

2) a) $\cos 2ax = 2\cos^2 ax - 1$, donc $\dfrac{1+\cos 2ax}{2} = \cos^2 ax = |\cos ax|^2$.

Comme $|\cos ax| \leq 1$, on a $\dfrac{1+\cos 2ax}{2} \leq |\cos ax|$.

b) D'après le résultat 2-a,

$$(*) \qquad \int_0^X \frac{|\cos ax|}{1+\sqrt{x}}\,dx \geq \frac{1}{2}\int_0^X \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^X \frac{\cos 2ax}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

- Comme $2a$ est un réel positif strictement, d'après le résultat 1, $\int_0^X \dfrac{\cos 2ax}{1+\sqrt{x}}\,dx$ a une limite quand $X \to +\infty$.

- Par ailleurs, la fonction positive $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ est équivalente à $\dfrac{1}{x^{1/2}}$ quand $x \to +\infty$. Comme $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{1/2}}$ diverge, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ aussi, et $\int_0^X \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ tend donc vers $+\infty$ quand $X \to +\infty$.

De ces deux propriétés, on déduit $\lim_{X\to+\infty} \dfrac{1}{2}\int_0^X \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^X \dfrac{\cos 2ax}{1+\sqrt{x}}\,dx = +\infty$.

L'inégalité $(*)$ permet alors de conclure que $\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \dfrac{|\cos ax|}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos ax}{1+\sqrt{x}}\,dx$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 3.

On considère une fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur $[1, +\infty[$, de signe quelconque.
On suppose que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Pour $x \geq 1$, on note $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. On a donc $F(1) = 0$ et, pour tout $x > 1$, $F'(x) = f(x)$.

1)a) Comme F est une primitive de f, elle est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, par définition de la convergence des intégrales, $F(x)$ a une limite L lorsque x tend vers l'infini. F est donc bornée sur $[1, +\infty[$. Il existe donc une constante positive M telle que, quel que soit $x \geq 1$, $|F(x)| \leq M$.

b) Soit $s > 0$.

Pour tout $t \geq 1$, $|F(t)\,e^{-st}| \leq Me^{-st}$, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-st}\,dt$ converge. Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt$ converge.

c) $|\int_1^{+\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt| \leq \int_1^{+\infty} |F(t)\,e^{-st}|\,dt \leq M\int_1^{+\infty} e^{-st}\,dt = \dfrac{Me^{-s}}{s}$

2)a) En utilisant $f = F'$ et $F(1) = 0$, en intégrant par parties, on trouve que pour $x > 1$,

$$\int_1^x f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_1^x F'(t)\,e^{-st}\,dt = \int_1^x F(t)\,se^{-st}\,dt + F(x)\,e^{-sx} = s\int_1^x F(t)\,e^{-st}\,dt + F(x)\,e^{-sx}$$

D'après les questions précédentes, le membre de droite de cette égalité a une limite quand $x \to +\infty$, $s\int_1^{+\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt + L\times 0$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$ converge, et $\int_1^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt = s\int_1^{+\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt$.

b)$|g(s)| = s|\int_1^{+\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt| \leq s\,\dfrac{Me^{-s}}{s} = Me^{-s}$, donc $\lim_{s\to+\infty} g(s) = 0$.