Feuille de TD 1

Exercice 1. Existence et calcul d'intégrales.
Regarder l'existence et le calcul des intégrales généralisées des suivantes :

$\int_0^1 \ln(t)\, dt$; $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt,\ \alpha \in \mathbb{R}$; $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3(1+t^2)}$

$\int_0^{\pi/2} \tan x dx$; $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}$;

$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$;

$\int_0^1 \frac{ln(1-x^2)}{x^2} dx$; $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Exercice 2. Etudier la nature de $\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$:

1. en utilisant une primitive.
2. par comparaison en montrant que : $\forall t \in [0, 1[,\ \frac{1}{2(1-t)} \leq \frac{1}{1-t^2} \leq \frac{1}{t-1}$,
3. En utilisant un équivalent au voisinage de 1.

Exercice 3. Existence d'intégrales.
$\int_0^{\pi} \frac{1-cost}{t^2} dt$; $\int_0^1 \frac{lnt}{t-1} dt$; $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$

$\int_0^{+\infty} \frac{t^3+2t^2+1}{t^5+t^4+2} dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{t}}$; $\int_1^{+\infty} (\sqrt[3]{t^3+1} - \sqrt{t^2+1}) dt$

$\int_0^{+\infty} \frac{cost}{1+t^2} dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t\sqrt{t}} dt$

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{sint}}{t^2} dt$; $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{lnt}$ $(on\ pourra\ comparer\ lnt\ et\ t)$

$\int_1^{+\infty} arctan\frac{1}{x} dx$; $\int_1^{+\infty} \frac{cosx}{\sqrt{x}} dx$; $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\sqrt{t+1}} dt\ (\alpha \in \mathbb{R})$

Exercice 4. Convergence
Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$ o α et β sont des éléments de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5. Etudier la convergence. Etudier suivant les valeurs de α et β la convergence des intégrales suivantes $(0 < a < 1 < b)$

$$\int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (lnx)^\beta}\ et\ \int_0^a \frac{dx}{x^\alpha |lnx|^\beta}$$

Exercice 6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit, lorsque ceci a un sens :

$$I_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{sinx}{x^\alpha} dx\ et\ J_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{cosx}{x^\alpha} dx$$

1. Montrer que I_α et J_α sont absolument convergentes pour $\alpha > 1$
2. En déduire que I_α et J_α convergent $0 < \alpha \leq 1$. Que peut-on dire des intégrales

$$A_\lambda = \int_0^{+\infty} sin(x^\lambda) dx\ et\ B_\lambda = \int_0^{+\infty} cos(x^\lambda) dx$$

lorsque $\lambda > 1$.

3. Montrer que I_α et J_α divergent si $\alpha < 0$. On pourra envisager les suites $u_n = \int_{2\pi}^{nx} \frac{sinx}{x^\alpha} dx$ et $v_n = \int_{2\pi}^{nx} \frac{cosx}{x^\alpha} dx$.

Exercice 7. Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{+\infty} \frac{xcosx-sinx}{x^2}dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{lnx}{(1+x^2)}dx$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{arctanx}{x^2}dx$
4. $\int_0^{\pi/2} lnsinxdx$

Indications :

1. Présenter $\int_0^{+\infty} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{+\infty}$
2. Changement de variable $t = \frac{1}{x}$
3. Intégration par parties.
4. Intégration par parties, puis changement de variable $x = 2t$

Exercice 8.

1. Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a, +\infty[$. Montrer que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.
2. Soit f une fonction positive et décroissante définie sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$

Exercice 9. Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{\pi/2} ln(sin(x))dx$ et $\int_0^{\pi/2} ln(cos(x))dx$ sont convergentes et ont la même valeur. Déterminer leur somme.

Exercice 10. Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe (f est semi-intégrable).

1. On pose $g(\alpha) = \int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx$. Montrer que g est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = 0$