Feuille de TD 2

Exercice 1. (EXEMPLES)
Rappel : Soient f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et $s \in \mathbb{R}$. L'intégrale de Laplace de f en s est, lorsqu'elle existe, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx$. La transformée de Laplace de f est la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie aux valeurs de s pour lesquelles l'intégrale de Laplace existe par :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

Pour chacune des fonctions suivantes, dire pour quelles valeurs de s la transformée de Laplace est définie et la calculer

1. La fonction constante égale 1.
2. La fonction qui vaut 0 pour $x < a$ (a est un réel positif fixé) et vaut 1 pour $x \geq a$
3. e^{-bx} oú $b \in \mathbb{R}$
4. e^{iwx} oú w est un nombre réel. On pourra remarquer que $|e^{(iw-s)t}| = e^{-st}$
5. En déduire la transformée de Laplace de $cos(wx)$ et $sin(wx)$

Exercice 2. (LINEARITE)
Soient f et g des fonctions pour lesquelles les transformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ existent.

1. Montrer que $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ et que $\mathcal{L}(bf) = b\mathcal{L}(f)$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.
2. Soient a et b des réels, en déduire que $\mathcal{L}(a + bf) = \frac{a}{s} + b\mathcal{L}(f)$. On rappelle que la fonction $a + bf$ est définie par $(a + bf)(x) = a + bf(x)$.
3. Calculer $\mathcal{L}(1 + 2e^{-5x})$.

Exercice 3. (DERIVEES ET PRIMITIVES)

1. Supposons f dérivable, montrer que

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

   On rappelle la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

2. En déduire la formule suivante :

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$$

3. Calculer de deux manières $\mathcal{L}(g')$ oú $g(x) = 1 + 2e^{-5x}$.
4. Soit F la primitive de f qui vaut 0 en 0, déduire de ce qui précède :

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s)$$

   Soit F_a la primitive de f qui vaut a en 0, montrer que :

$$\mathcal{L}(F_a)(s) = \frac{1}{s}(a + \mathcal{L}(f)(s))$$

5. Calculer de deux manières $\mathcal{L}(G_1)$ oú G_1 est la primitive de g qui vaut 1 en 0.

Exercice 4. (DERIVATION)
Soit f une fonction dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ existe. On admet que celle ci est dérivable et que sa dérivée par rapport s est donnée par :

$$\mathcal{L}(f)'(s) = \int_0^{+\infty} f(x)(e^{-sx})'dx$$

1. Montrer que $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(xf(x))$.
2. En déduire que $\mathcal{L}(f)'' = \mathcal{L}(x^2 f(x))$, $\mathcal{L}(f)^{(3)} = -\mathcal{L}(x^3 f(x))$ etc ...
3. Calculer $\mathcal{L}(x)$, $\mathcal{L}(x^2)$ .... (constante près).

Exercice 5. (EQUATIONS DIFFERENTIELLES) Résoudre les équations différentielles suivantes l'aide de la transformation de Laplace :

- Equations différentielles linéaires coefficients constant
  1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.
  2. $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
  3. $y'' + 4y' + 4y = t^4 e^{-2t}$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
  4. $y'' + 4y' + 4y = t^4 e^{-2t}$ avec $y(0) = -y'(0) = 2$
- Equations différentielles linéaires :
  1. $ty'' - (1+t)y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$.
  2. $ty'' + (1+t)y' = \frac{t^2}{2} - 1$
  3. $ty'' + (1-t)y' - y = 0$ avec $y(0) = 5$, $\lim_{t\to+\infty} y = 0$.
  4. $ty'' + 2y' + 4ty = 0$ avec $y(0) = 0$

Exercice 6.

1. Décomposer en éléments simples la fraction : $\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$
2. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}sin\, x \text{ avec } y(0) = 0,\ y'(0) = 2$$

Exercice 7. Résoudre le système :

$$\begin{cases} y'' + (z' - y') &= -\frac{3}{4}y \\ z'' - (z' - y') &= -\frac{3}{4}z \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y(0) = z(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $z'(0) = -1$.

Exercice 8. Soit $w \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xsin(wx)$.

1. Montrer que $f''(x) = 2wcos(wx) - w^2 f(x)$.
2. En déduire la transformée de Laplace de f.
3. De quelle fonction $\frac{s}{s^2+3}$ est-elle transformée de Laplace?