Feuille de TD 3

Exercice 1.
Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

1. la fonction "porte" notée Π est définie par :

$$\begin{cases} Si\ t \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}] & \Pi(t) = 1 \\ Si\ t \notin [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}] & \Pi(t) = 0 \end{cases}$$

2. les fonctions "impulsions" notées Π_α sont définies par :

$$\begin{cases} Si\ t \in [-\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}] & \Pi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \\ Si\ t \notin [-\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}] & \Pi_\alpha(t) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.
Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer $f * f$ calculer ainsi la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$. On rappelle que $f * f$ est le produit de convolution défini par $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$.
4. Déterminer la transformée de Fourier $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 3.
Soit la fonction triangle Λ définie par :

$$\begin{cases} \Lambda(t) = 1 - |t| & t \in [-1,+1] \\ \Lambda(t) = 0 & t \notin [-1,+1] \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction Λ.
2. Déterminer la transformée de Fourier de Λ directement.
3. En utilisant la transformation de Laplace.

Exercice 4.
Soit $\alpha > 0$ et $f(t) = e^{-\alpha t^2}$.

1. Vérifier que $f'(t) = -2\alpha t f(t)$.
2. On pose $F(s) = \mathcal{F}(f)(s)$. Montrer en appliquant $\mathcal{F}$ à la relation du 1) que F est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
3. En déduire que $F(s)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5.
On considère la fonction Λ définie par :

$$\begin{cases} \Lambda(t) = 1 - |t| & t \in [-1,1] \\ \Lambda(t) = 0 & t \notin [-1,1] \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de Λ et exprimer $\Lambda'(t)$ à l'aide de la fonction porte Π définie dans l'exercice 1.
2. Calcul la transformée de Fourier de Λ'. En déduire la transformée de Fourier de Λ.

3. Vérifier que $\Lambda = \Pi * \Pi$. Retrouver alors le résultat de la question 2.
4. Utiliser la transformée de Fourier de la fonction Π et les propriétés de l'opérateur $\mathcal{F}$ pour trouver les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \Pi(\frac{t-1}{2});\ t \mapsto t\Pi(t);\ t \mapsto t^2\Pi(t)$$

Exercice 6.
Etude de l'évolution de la température à l'intérieur d ?une tige rectiligne, homogène, de section petite par rapport à la longueur que l'on suppose infinie. On note $u(x,t)$ la température de la tige en l ?abscisse x au temps t. L'équation aux dérivées partielles associée à ce modèle est l'équation de la chaleur :

$$\frac{\sigma u}{\sigma t} = a^2 \frac{\sigma^2 u}{\sigma^2 x^2}$$

avec $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$ où Λ est la conductivité de la tige, ρ sa masse volumique et c sa chaleur spécifique.
On va résoudre ce problème dans le cas où la température est soumise à la condition initiale $u(x,0) = \phi(x)$, où ϕ est une fonction bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose u de classe C^2 par rapport à x, et de classe C^1 par rapport à t.

1. Appliquer la transformée de Fourier par rapport à x, aux deux membres de l'équation de la chaleur. En déduire une équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$. La résoudre.
2. Exprimer $u(x,t)$ sous forme d'un produit de convolution.

Exercice 7.
Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds$$

où β est un réel strictement positif.

1. Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
2. En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.