Correction du DS (19 novembre 2011)

Exercice 1.

1. (a) Calcul de $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ est continue sur $[3, +\infty[$ donc elle est localement intégrable sur $[3, +\infty[$.
   Soit $t \in [3, +\infty[$, on fait le changement de variable $u = \sqrt{x}$ donc $2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ et $u^2 = x$.

$$\int_3^t \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{t}} \frac{2du}{u^2+1} = [2arctan(u)]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{t}} = 2arctan(\sqrt{t}) - 2arctan(\sqrt{3})$$

   Pour calculer $arctan(\sqrt{3})$ on cherche x tel que $\frac{sin(x)}{cos(x)} = \sqrt{3}$.
   Ce qui donne $x = \frac{\pi}{3}$ (car $sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$)
   On passe à la limite :

$$\lim_{x \to +\infty} 2arctan(\sqrt{t}) - 2arctan(\sqrt{3}) = \pi - 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

   Donc $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ converge et $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{3}$

   (b) $|\frac{sin(x)}{(x+1)\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ donc par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives, l'intégrale généralisée $\int_3^{+\infty} \frac{sin(x)}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ est absolument convergente, donc par conséquent, elle est convergente.

2. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$.
   On a que $\forall x > 0$, $ln(1+x) \leq x$.
   On pose $f(x) = ln(x+1) - x$ $\forall x \geq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ Donc f est décroissante et $f(0) = 0$ donc $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$ donc $\forall x \geq 0$, $ln(1+x) \leq x$. De plus $\frac{e^{-x}ln(1+x)}{x} \geq 0$ $\forall x \geq 0$.
   (a) On a une généralisation en 0.
   et $\frac{e^{-x}ln(1+x)}{x} \leq e^{-x}$, $\forall x \geq 0$. Or $\int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$ donc $\int_0^1 e^{-x}dx$ est convergente et par le critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{e^{-x}ln(1+x)}{x}dx$ est convergente.
   (b) On a une généralisation en $+\infty$.
   et $\frac{e^{-x}ln(1+x)}{x} \leq e^{-x}$, $\forall x \geq 0$.
   Or, soit $t \in [1, +\infty[$, $\int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_1^t = e^{-t} - e^{-1}$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-1} - e^{-t} = e^{-1}$ donc $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente et par le critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}ln(1+x)}{x}dx$ est convergente.

3. On a une double généralisation en 0 et en $+\infty$. Pour déterminer, la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}ln(1+x)}{x}dx$ il faut étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{e^{-x}ln(1+x)}{x}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}ln(1+x)}{x}dx$ or par (a) et (b), elles sont toutes deux convergentes donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}ln(1+x)}{x}dx$ est convergente.

Exercice 2.

1. Pour déterminer c, on multiplie l'égalité par $p+2$ pour ensuite remplacer p par -2 (la valeur qui annule $p+2$), on a donc $\frac{10}{(p^2+1)(p+3)} = (p+2)\frac{(ap+b)}{p^2+1} + c + (p+2)\frac{d}{p+3}$, et on obtient $c = \frac{10}{5} = 2$.
   Pour déterminer d, on multiplie l'égalité par $p+3$ pour ensuite remplacer p par -3 (la valeur qui annule $p+3$), on a donc $\frac{10}{(p^2+1)(p+2)} = (p+3)\frac{(ap+b)}{p^2+1} + (p+3)\frac{c}{p+2} + d$, et on obtient $d = \frac{10}{-10} = -1$.
   Enfin, pour déterminer a et b, on multiplie l'égalité par p^2+1 pour ensuite remplacer p par i (la valeur

qui annule p^2+1), on a donc $\frac{10}{(p+2)(p+3)} = (ap+b) + (p^2+1)\frac{c}{p+2} + (p^2+1)\frac{d}{p+3}$, et on obtient $ai+b = \frac{10}{(i+2)(i+3)} = \frac{10}{5i+5} = \frac{2}{i+1} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$ donc $a=-1$ et $b=1$.
Donc $\frac{10}{(p^2+1)(p+2)(p+3)} = \frac{(-p+1)}{p^2+1} + \frac{2}{p+2} - \frac{1}{p+3}$.

2. On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle. Ainsi, $\mathcal{L}(y''(t)+5y'(t)+6y(t))(s) = \mathcal{L}(10sin(t))(s)$. Par linéarité, $\mathcal{L}(y''(t))(s+5\mathcal{L}(y'(t))(s)+6\mathcal{L}(y(t))(s) = 10\mathcal{L}(sin(t))(s)$. On pose $z := \mathcal{L}(y)$.
Or, $\mathcal{L}(y'')(s) = s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) = s^2z(s)$ car on veut $y(0) = y'(0) = 0$.
$\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y) - y(0) = sz(s)$ car on veut $y(0) = 0$.
$\mathcal{L}(sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}$ Par suite, l'équation différentielle devient $s^2z(s) + 5sz(s) + 6z(s) = \frac{10}{s^2+1}$.
$z(s) = \frac{10}{(s^2+1)(s^2+5s+6)}$.
On calcule $\Delta = 5^2 - 4\times 1\times 6 = 25-24 = 1$ donc $s_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$ et $s_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$ sont les racines du polynôme.
Par suite, $s^2+5s+6 = (s+2)(s+3)$ et $z(s) = \frac{10}{(s^2+1)(s+2)(s+3)} = \frac{(-p+1)}{p^2+1} + \frac{2}{p+2} - \frac{1}{p+3}$
On inverse la transformée de Laplace et on obtient : $y(t) = sin(t) - cos(t) + 2e^{-2t} - e^{-3t}$

3. Or $sin(t-\frac{\pi}{4}) = sin(t)cos(\frac{\pi}{4}) - cos(t)sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(sin(t) - cos(t))$. Et, $\lim_{x\to+\infty} e^{-2t} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-3t} = 0$.
On pose donc $\epsilon(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ et $A = \sqrt{2}$, donc $y(t) = Asin(t-\frac{\pi}{4}) + \epsilon(t)$.

Exercice 3.
On applique la transformée de Laplace au système différentiel, on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x')(s) &= \mathcal{L}(-2x(t) - y(t))(s) \\ \mathcal{L}(y')(s) &= \mathcal{L}(x(t) - 2y(t))(s) \end{cases}$$

Par linéarité,

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x')(s) &= -2\mathcal{L}(x(t))(s) - \mathcal{L}(y(t))(s) \\ \mathcal{L}(y')(s) &= \mathcal{L}(x(t))(s) - 2\mathcal{L}(y(t))(s) \end{cases}$$

On pose $Y := \mathcal{L}(y)$ et $X := \mathcal{L}(x)$. De plus $\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) = sY(s)$ car on veut $y(0) = 0$ et $\mathcal{L}(x')(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$ car on veut $x(0) = 1$.
L'équation différentielle devient donc :

$$\begin{cases} sX(s) - 1 &= -2X(s) - Y(s) \\ sY(s) &= X(s) - 2Y(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) &= (s+2)Y(s) \\ (s+2)^2Y(s) - 1 &= -Y(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) &= (s+2)Y(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{(s+2)^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) &= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s+2)^2+1} \end{cases}$$

On inverse la transformée de Laplace pour obtenir la solution :

$$\begin{cases} y(t) &= e^{-2t}sin(t) \\ x(t) &= e^{-2t}cos(t) \end{cases}$$

De plus, on a $|e^{-2t}cos(t)| \le e^{-2t}$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-2t} = 0$ donc par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}cos(t) = 0$. De même, $\lim_{x\to+\infty} e^{-2t}sin(t) = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$.