Correction de l'examen (3 janvier 2012)

Exercice 1.

1. L'intégrale de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On a $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, donc par la question 1 et par le critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives $\int_1^{+\infty} |\frac{\cos t}{t^2}| dt$ est convergente. Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente et comme toute intégrale absolument convergente est convergente, elle est aussi convergente.
3. On pose
$$\begin{array}{ll} u'(t) = \sin t & u(t) = -\cos t \\ v(t) = \frac{1}{t} & v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{array}$$
Comme $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, elle est donc localement intégrable. Soit $x \in [1, +\infty[$, par intégration par parties :
$$\begin{array}{rcl} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt & = & [-\frac{\cos t}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \\ & = & -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \end{array}$$
Or $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} + \cos 1\right) = \cos 1$ car $x \mapsto \cos x$ est bornée. Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ ont même nature. Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente d'après la question précédente.

Exercice 2.

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle qui devient :

$$\mathcal{L}(y''(t) + 2y'(t) + y(t))(s) = \mathcal{L}(e^{-t})(s)$$

Par linéarité de la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}(y''(t))(s) + 2\mathcal{L}(y'(t))(s) + \mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(e^{-t})(s) \ (*)$$

On pose $z(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Or

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(y''(t))(s) & = & s^2\mathcal{L}(y(t))(s) - sy(0) - y'(0) \\ & = & s^2 z(s) \ car\ on\ veut\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(y'(t))(s) & = & s\mathcal{L}(y(t))(s) - y(0) \\ & = & sz(s) \ car\ on\ veut\ y(0) = 0 \end{array}$$

et

$$\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{1}{s+1}$$

En remplaçant dans $(*)$, on obtient $(s^2 + 2s + 1)z(s) = \frac{1}{s+1}$ et donc $z(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$. En inversant alors la transformée de Laplace, on obtient la solution y de l'équation de départ qui est $y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$.

Exercice 3.

I.1 Tout d'abord, il est clair que f_a est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions usuelles. D'autre part la fonction f_a étant paire, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f_a(x)dx$.
Pour $x > 1$, nous avons $x^2 > x$ donc $e^{-x^2} < e^{-x}$. Or, pour $t \in [0, +\infty[$, $\int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t} + 1$ et $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}dx = 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente. C'est ainsi que d'après le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives, il en est de même pour $\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$. Enfin, f_a est continue sur l'intervalle fermée borné $[0, 1]$ donc $\int_0^1 |f_a(x)|dx$ converge et donc $\int_0^{+\infty} |f_a(x)|dx$ converge. C'est ainsi que l'on montre que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$
Pour $x > 1$, nous avons aussi $xe^{-x^2} < xe^{-x}$. Or, pour $t \in [0, +\infty[$, par intégration par parties,

$\int_0^t xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^t + \int_0^t e^{-x}dx = -te^{-t} + [-e^{-x}]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$ et $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x}dx = 1$ donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente. C'est ainsi que d'après le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives, il en est de même pour $\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$. Enfin, f_a est continue sur l'intervalle fermée borné $[0,1]$ donc $\int_0^1 |f_a(x)|dx$ converge et donc $\int_0^{+\infty} |f_a(x)|dx$ converge. C'est ainsi que l'on montre que $(x \mapsto xf_a(x)) \in L^1(\mathbb{R})$
(On aurait aussi pu remarquer que $\lim_{x\to+\infty} x^2 f_a(x) = 0$, par croissance comparée, ainsi par définition de la limite, il existe un rang $M_1 > 1$ tel que $|x^2 f_a(x)| < 1$ i.e $|f_a(x)| < \frac{1}{x^2}$ donc par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives comme $\int_{M_1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même pour $\int_{M_1}^{+\infty} |f_a(x)|dx$. Enfin, f_a est continue sur l'intervalle fermée borné $[0, M_1]$ donc $\int_0^{M_1} |f_a(x)|dx$ converge et donc $\int_0^{+\infty} |f_a(x)|dx$ converge. C'est ainsi que l'on montre que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$. On montre de la même façon que $x \mapsto xf_a(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.)

I.2
$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F}(f_a)(0) & = & \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)e^{-0\times x}dx \\ & = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx\end{array}$$

On pose le changement de variable suivant $u = \frac{x}{a\sqrt{2}}$ alors $du = \frac{1}{a\sqrt{2}}dx$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F}(f_a)(0) & = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du \\ & = & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du \; par\; linéarité \\ & = & 1 \; d'après\; l'énoncé\end{array}$$

II.1 On remarque que $f_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{u(x)}$ où $u(x) = -\frac{x^2}{2a^2}$ donc $u'(x) = -\frac{x}{a^2}$. Ainsi, par le théorème de composition des dérivées,

$$f_a'(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}u'(x)e^{u(x)} = -\frac{x}{a^2}f_a(x) \; (*)$$

II.2 On applique la transformée de Fourier à l'équation précédente, ainsi :

$$\mathcal{F}(f_a'(x))(s) = \mathcal{F}(-\frac{x}{a^2}f_a(x))(s) \; (**)$$

Or, d'après le cours, $\mathcal{F}(f_a'(x))(s) = is\mathcal{F}(f_a(x))(s)$ et $\mathcal{F}(-\frac{x}{a^2}f_a(x))(s) = \frac{-1}{a^2}\mathcal{F}(xf_a(x))(s) = \frac{-1}{a^2} \times i\mathcal{F}(f_a(x))'(s)$. C'est ainsi, que $(**)$ devient :

$$is\mathcal{F}(f_a(x))(s) = \frac{-1}{a^2} \times i\mathcal{F}(f_a(x))'(s)$$

et on a donc bien :

$$\mathcal{F}(f_a(x))'(s) = -a^2 s\mathcal{F}(f_a(x))(s)$$

II.3 On a que $\mathcal{F}(f_a(x))(s)$ est donc solution de l'équation différentielle $y'(x) = g(x)y(x)$ avec $g(x) = -a^2 s$, une primitive G de g est donc $G(x) = \frac{-a^2s^2}{2}$, par suite, $\mathcal{F}(f_a(x))$ est de la forme

$$\mathcal{F}(f_a(x))(s) = Ce^{G(x)} = Ce^{\frac{-a^2s^2}{2}}$$

Or, $\mathcal{F}(f_a(x))(0) = 1$ par suite $C = 1$ et $\mathcal{F}(f_a(x))(s) = e^{\frac{-a^2s^2}{2}}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

III.1 D'après le cours,

$$\mathcal{F}(f_a * f_b)(s) = \mathcal{F}(f_a)(s) \times \mathcal{F}(f_b)(s) = e^{\frac{-a^2s^2}{2}} \times e^{\frac{-b^2s^2}{2}} = e^{\frac{-\sqrt{a^2+b^2}^2 s^2}{2}} = \mathcal{F}(f_{\sqrt{a^2+b^2}^2})(s)$$

par injectivité de l'inverse de la transformée de Fourier.

III.2 Par injectivité de la transformée de Fourier,

$$f_a * f_b = f_{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a^2+b^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}}$$