Scolarit et de la Vie tudiante — Direction de la

UNIVERSIT BORDEAUX 1 Sciences Technologies

L I C E N C E

ANNE UNIVERSITAIRE 2011 /2012
Première Session d'Automne

ETAPE : PY300 UE : MP1PY3W01
Épreuve : Mathématiques
*Date :*3 janvier 2012
Heure : 8H30 *Durée :*1H30
Épreuve de Monsieur Augé Jean-Matthieu
Tous Documents Interdits

Département Licence

Toutes les réponses doivent être argumentées. On pourra utiliser sans démonstration les tables de Laplace fournies avec le sujet.

Exercice 1

1. Rappeler pour quelles valeurs réelles de α l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge.
2. Quelle est la nature (absolument convergente ? convergente ?) de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$.
3. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Exercice 2

A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 3

On rappelle que $L^1(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on désignera par $\mathcal{F}f$ la transformée de Fourier de f. Pour $a > 0$, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

I.1. Montrer que f_a et $(t \mapsto t f_a(t))$ sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.
I.2. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$. En déduire la valeur de $\mathcal{F}f_a(0)$.

II.1. Trouver une relation simple entre f_a et f_a'.
II.2. En déduire que $\mathcal{F}f_a$ vérifie l'équation différentielle : $y'(x) = -a^2 x y(x)$.
II.3. Établir que $\mathcal{F}f_a(x) = e^{-\frac{a^2 x^2}{2}}$.

III.1. Montrer que pour $a, b > 0$, $\mathcal{F}(f_a * f_b) = \mathcal{F}f_{\sqrt{a^2+b^2}}$.
III.2. Que vaut $f_a * f_b$?

FIN

T.S.V.P.