Intégrales généralisées - Réponses

Exercice 1 - Réponse

La fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}}$ est continue et positive sur $]1, +\infty[$

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 1 et à la borne $+\infty$

Utilisons la relation de Chasles

$$I = \int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}}\,dx$$

Pour l'intégrale I_1 au voisinage de 1^+

$$f(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{3}{\sqrt{2}\,(x-1)^{1/2}}$$

Or $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/2}}$ $(\beta = \frac{1}{2})$ converge, en vertu de la positivité et du critère des équivalents

et donc l'intégrale $I_1 = \int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}}\,dx$ converge

Pour l'intégrale I_2, au voisinazge de $+\infty$,

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{\sqrt{x^5}} = \frac{2}{x^{3/2}}$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ $(\alpha = \frac{3}{2})$ convere en vertu de la positivité et du critère des équivalents

donc $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{(2x+1)}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}}\,dx$ converge

L' intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}}\,dx$ converge

Exercice 2 - Réponse

La fonction $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arc\,tan} x}{x^r}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne $+\infty$

Utilisons la relation de Chasles:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan} x}{x^r}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arc\,tan} x}{x^r}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan} x}{x^r}\,dx = I_1 + I_2$$

Pour l'intégrale I_1 au voisinage de 0^+

$$\operatorname{Arc\,tan} x \underset{0^+}{\sim} x \quad \text{et} \quad f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x^{r-1}}$$

L' intégrale I_1 converge $\Leftrightarrow \beta = r-1 < 1 \Leftrightarrow r < 2$

Pour l'intégrale I_2 au voisinage de $+\infty$

$$\operatorname{Arc\,tan} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^r}$$

L' intégrale I_2 converge $\Leftrightarrow \alpha = r > 1$

Donc l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan} x}{x^r}\,dx$ converge $\Leftrightarrow 1 < r < 2$

Exercice 3 - Réponse

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne 1.

On utilise la relation de Chasles:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx = I_1 + I_2$$

Pour l'intégrale I_1, la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$ est continue et négative sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

au voisinage de 0^+ $\quad f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln x$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx = \lim_{\mu \to 0^+} \int_\mu^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx = \lim_{\mu \to 0} \left[x\ln x - x\right]_\mu^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

l' intégrale I_1 converge

Pour l'intégrale I_2, au voisinage de 1^-, on pose $x = 1-h$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1-h)}{\sqrt{h}} = 0$$

puisque $\ln(1-h) = -h + o(h)$

on peut donc prolonger par continuité la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$ en posant $f(1) = 0$

L' intégrale I_2 est une intégrale définie donc convergente

L' intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ est convergente

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable

$\sqrt{1-x} = t$ ou $x = 1 - t^2$

$$I = 2\int_0^1 \ln(1-t^2)\,dt = 2\int_0^1 \ln(1+t)\,dt + 2\int_0^1 \ln(1-t)\,dt$$

et en intégrant par parties

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx = 4(\ln 2 - 1)$$

Exercice 4 - Réponse

La fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{x + e^{-x}}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$

L' intégrale est généralisée uniquement à la borne $+\infty$

au $v(+\infty)$ $\quad f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$

Pour $x \in [e, +\infty[$ alors $\ln x \geq 1$ et $f(x) \geq \frac{1}{x} > 0$

or $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x}$ $(\alpha = 1)$ diverge en vertu de la positivité et du critère des équivalents

donc $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,dx$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\,dx$ diverge

Exercice 5 - Réponse

La fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne $+\infty$. Utilisons la relation de Chasles

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = I_1 + I_2$$

La fonction f est négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$

Pour l'intégrale I_1: au voisinage de 0^+

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \underset{0^+}{\sim} \ln x$$

$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ de même nature que $\int_0^1 \ln x\,dx$

mais $\lim_{\mu \to 0} \int_\mu^1 \ln x\,dx = \lim_{\mu \to 0} \left[x\ln x - x\right]_\mu^1 = -1$

donc $\int_0^1 \ln x\,dx$ converge et $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ converge

Pour l'intégrale I_2 : au voisinage de $+\infty$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^2}$ $\quad$ or $\quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

Pour x suffisamment grand

$0 < \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} < 1$

$0 < \ln x < \sqrt{x}$

$0 < \dfrac{\ln x}{x^2} < \dfrac{1}{x^{3/2}}$

on peut aussi écrire $\dfrac{\ln x}{x^2} = o(\dfrac{1}{x^{3/2}})$

mais puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge $(\alpha = \frac{3}{2})$

alors $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ converge

et finalement $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ converge.

Exercice 6 - Réponse

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne $+\infty$

On utilise la relation de Chasles

$$I = \int_0^1 \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}\,dx = I_1 + I_2$$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}$ est positive sur $]0, +\infty[$

Pour l'intégrale I_1 au voisinage de 0^+:

$\dfrac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(\beta = \frac{1}{2})$ et puisque f est de signe constant

en vertu du critère des équivalents I_1 converge

Pour l'intégrale I_2 au voisinage de $+\infty$

$\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}$

et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge $(\alpha = \frac{1}{2})$ alors I_2 diverge

et par conséquent l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge

Exercice 7 - Réponse

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0, 1[$ et de signe constant sur $]0, 1[$

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne 1

Utilisons la relation de Chasles

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx = I_1 + I_2$$

Pour l'intégrale I_1 au voisinage de 0^+

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{4}} \ln x = 0$$

pour x positif et petit $f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$0 < -x^{\frac{1}{4}} \ln x < 1$$

$$\text{et donc } 0 < -\frac{\ln x}{x^{1/2}} < \frac{1}{x^{3/4}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o(\frac{1}{x^{3/4}})$$

Puisque $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{3/4}}$ $(\beta = \frac{3}{4})$ converge alors $\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx$ converge

Pour l'intégrale I_2 au voisinage de 1^-

Sachant que $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$ en posant $1 + h = x$, on obtient $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$

$$f(x) \underset{1}{\sim} -\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

Puisque $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ $(\beta = \frac{1}{2})$ converge alors $\int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx$ converge

et l'intégrale I converge

Préliminaire

Calculons $v = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ en posant $x = \sin^2 t$ avec $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$v = \int \frac{2\sin t \cos t}{\sin t \cos^3 t}\,dt = 2\int \frac{dt}{\cos^2 t} = 2\tan t = 2\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

Intégrons par parties:

$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad u' = \dfrac{1}{x}$

$v = 2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \quad \Leftarrow \quad v' = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$

$$I = 2\left[\sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+}\left[\sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln x\right] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-}\left[\sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln x\right] = 0$$

$$I = -2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = -4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} = -2\pi$$

Exercice 8 - Réponse

$f(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]0, 1[$ et toujours négative sur $]0, 1[$

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne 1

Utilisons la relation de Chasles

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx = I_1 + I_2$$

Pour l'intégrale I_1 au voisinage de 0^+

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln x$$

Puisque $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx$ converge alors $\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ converge

Pour l'intégrale I_2 au voisinage de 1^-

Sachant que $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$ en posant $1 + h = x$, on obtient $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$

alors $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}}$

On prolonge par continuité la fonction en 1 en posant $f(1) = 1$, l' intégrale

$I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est l'intégrale d'une fonction continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

elle est donc convergente

Pour le calcul de l'intégrale, on effectue le changement de variable $x = \cos t$

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \cos x}{1 + \cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \cos x}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\,dx$$

puis l'on pose $u = \cos x$

$I = \int_0^1 \ln \frac{1-u^2}{1+u^2}\,du$ que l'on intègre par parties

finalement

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

Exercice 9 - Réponse

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne $+\infty$

On utilise la relation de Chasles

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx + \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx = I_1 + I_2$$

Pour l'intégrale I_1, la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^{3/2}}$ est positive sur $]0, \pi[$

et $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^{3/2}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^{1/2}}$

I_1 converge $(\beta = \frac{1}{2})$

Pour l'intégrale I_2, la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^{3/2}}$ n'est pas de signe constant sur $]\pi, +\infty[$

$\dfrac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \dfrac{1}{x^{3/2}}$

$$\left|\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx\right| \leq \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx \leq \int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \qquad (\alpha = \frac{3}{2})$$

donc I_2 est absolument convergente donc convergente

et l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ est convergente

Exercice 10 - Réponse

L' intégrale est généralisée uniquement à la borne $+\infty$

La fonction $f(x) = \dfrac{1 + 2\sin x}{1 + \sqrt{x^3}}$ n'est pas de signe constant sur $[0, +\infty[$

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{1 + 2\sin x}{1 + \sqrt{x^3}}\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{1 + 2\sin x}{1 + \sqrt{x^3}}\right|dx$$

or $\forall x \in R \quad |\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1 + 2\sin x}{1 + \sqrt{x^3}}\right| \leq \dfrac{3}{x^{\frac{3}{2}}}$

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ $(\alpha = \frac{3}{2})$ converge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 + 2\sin x}{1 + \sqrt{x^3}}\,dx$

est absolument convergente donc convergente

Exercice 11 - Réponse

On intègre par parties

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$$

le terme $\left[\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty}$ converge puisque $\lim_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\sin \lambda}{\sqrt{\lambda}} = 0$

l' intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ est absolument convergente

et donc $I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente

Rappel: $\dfrac{\cos^2 x}{x} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\cos 2x}{2x}$

L' intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$ est la somme d' une intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ divergente

et d'une intégrale convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ (en intégrant par parties)

L' intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$ est divergente

Exercice 12 - Réponse

Intégrons par parties

$u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad u' = -\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

$v = -\cos x \qquad v' = \sin x$

$$I = \left[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$\lim_{\lambda \to +\infty} \left[-\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^\lambda$ existe

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad (\alpha = \frac{3}{2})$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ converge absolument donc converge

Deux des trois expressions de l' intégration par parties existent donc la troisième expression existe aussi et $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x + \frac{1}{x})\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x + \frac{1}{x})\,dx = J_1 + J_2$$

Pour J_1 au voisinage de 0^+

$$|J_1| \leq \int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x + \frac{1}{x})\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (\beta = \frac{1}{2})$$

Donc J_1 est absolument convergente

Pour J_2 au voisinage de $+\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x + \frac{1}{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sin x \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\cos x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sin x + O(\frac{1}{x})) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

$\int_1^{+\infty} O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})\,dx$ est absolument convergente donc comvergente

et $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge donc J_2 converge

$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x + \frac{1}{x})\,dx$ converge

Exercice 13 - Réponse

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x})\right] = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x \cos x}{x} + O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge (cf exercice 12)

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x}\,dx$ converge aussi

$\int_1^{+\infty} O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})\,dx$ est absolument convergente donc convergente

$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}\,dx$ converge

Exercice 14 - Réponse

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x})\right] = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

Rappel $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ diverge

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ converge et $\int_1^{+\infty} O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})\,dx$ converge

$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\,dx$ diverge

Exercice 15 - Réponse

L' intégrale est généralisée à la fois à la borne 0 et à la borne 1

On utilise la relation de Chasles

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{1-x}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = I_1 + I_2$$

Pour l'intégrale I_1, la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$ est continue et négative sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

$$\text{et comme } \int_0^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx = \lim_{\mu \to 0^+} \int_\mu^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx = \lim_{\mu \to 0} \left[x\ln x - x\right]_\mu^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

l' intégrale I_1 converge.

Pour l'intégrale I_2, la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$ est continue et négative sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$

au voisinage de 1^-, on pose $x = 1 + h$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(1+h)}{1-(1+h)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(1+h)}{-h} = -1 \text{ puisque } \ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$$

On peut donc prolonger par continuité la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$ en posant $f(1) = -1$

L' intégrale I_2 est une intégrale définie donc convergente.

L' intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$ est convergente

On considère la fonction f prolongée par continuité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Calculons $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$

Partons de l' identité remarquable

$$(1-x)(1 + x + \dots + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

$$\text{d'où pour } x \neq 1 \qquad \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$$

$$\text{et donc } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{soit } I = -\int_0^1 \ln x\left[\sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}\right]dx$$

la somme $\sum$ portant sur un nombre fini de termes, par suite de la linéarité de l' intégration, on peut permuter les symboles $\sum$ et $\int$

La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $]0, 1]$ et de limite nulle en 0 (d'où la nécessité d' envisager la fonction $xf(x)$). Elle est donc bornée sur $[0, 1]$.

Soit $M = \sup_{x \in [0,1]} |xf(x)|$ avec M fini.

$$\left|\int_0^1 xf(x)x^n\,dx\right| \leq M\int_0^1 x^n\,dx = \frac{M}{n+1} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

D' où en faisant tendre n vers l'infini dans la relation (1)

$$I = -\sum_{k=0}^n \int_0^1 x^k \ln x\,dx$$

En intégrant par parties

$$\int_0^1 x^k \ln x\,dx = -\int_0^1 \frac{x^k}{k+1}\,dx = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\text{Soit } I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$