Fonctions intégrables

Exercice 1 - Fonction triangle - *Troisième année* - ⋆

Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ 1-x & \text{si } 0\leq x<1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 2 - Semi-groupe de Poisson - *Troisième année* - ⋆

Pour $\alpha>0$, on pose $f(x)=e^{-\alpha|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer $f\star f$; calculer ainsi la transformée de Fourier de $x\mapsto\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x\mapsto\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 3 - Régularité - *Troisième année* - ⋆

Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\xi\mapsto\xi\hat{f}(\xi)\in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f coïncide presque partout avec une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

Exercice 4 - - *Troisième année* - ⋆⋆

Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}^n$ telle que $\hat{f}(x_0)=0$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par les $(\tau_x f)$, $x\in\mathbb{R}^n$ n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, où $\tau_x f(t)=f(t-x)$.

Exercice 5 - Non-surjectivité de la transformée de Fourier - *Troisième année* - ⋆⋆

On sait que la transformation de Fourier est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions continues de limite nulle à l'infini $C_0(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de prouver qu'ainsi définie, la transformée de Fourier n'est pas surjective, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions de $C_0(\mathbb{R})$ qui ne sont pas la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On fixe $f\in L^1(\mathbb{R})$, impaire.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$\hat{f}(x)=-2i\int_0^{+\infty}f(t)\sin(2\pi xt)dt.$$
2. Prouver que la fonction $\phi(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$ est définie, continue et bornée sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que l'on a :
$$\int_1^R\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}-2if(x)\left(\int_{2\pi x}^{2\pi Rx}\frac{\sin u}{u}du\right)dx.$$
En déduire :
$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=-2i\int_0^{+\infty}f(x)\phi(2\pi x)dx.$$
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x)=\frac{\arctan x}{\ln(2+x^2)}.$$

(a) Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$.
(b) On suppose que g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f. Montrer que f est nécessairement impaire (presque partout).
(c) En déduire que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Exercice 6 - Transformée de Fourier et produit de convolution - *Troisième année* - $\star$

1. En utilisant la transformée de Fourier, montrer que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'unité, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonctions $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f \star g = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Resoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f \star f = f$.

Exercice 7 - Semi-groupe de la chaleur - *Troisième année* - $\star$

Pour $t > 0$, on pose $q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$. Calculer la transformée de Fourier de q_t. En déduire que $q_t \star q_s = q_{s+t}$ (la famille (q_t) s'appelle semi-groupe de la chaleur).

Exercice 8 - Une équation intégrale - *Troisième année* - $\star$

Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|}u(s)ds,$$

où β est un réel strictement positif.

1. Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
2. En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in]0, 1/2[$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.

Exercice 9 - Equation de la chaleur - *Troisième année* - $\star\star$

On considère une tige homogène très mince de longueur infinie. La température de la tige au temps $t \geq 0$ au point d'abscisse $x \in \mathbb{R}$ est notée $u(t, x)$. On suppose que cette fonction vérifie l'équation suivante, appelée équation de la chaleur :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x). & \end{array}\right.$$

On suppose que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, et on cherche une solution à l'équation précédente, C^1 par rapport à la variable temps, et C^2 par rapport à la variable d'espace.

1. Analyse : On suppose que l'équation précédente possède une solution u telle qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $t \geq 0$,

$$|u(t, x)| \leq g(x), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right| \leq g(x), \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right| \leq g(x).$$

On note $\mathcal{F}_x(u)(t, x)$ la transformée de Fourier de u par rapport à la variable d'espace x :

$$\mathcal{F}_x(u)(t, x) = \int_{\mathbb{R}} u(t, \xi)e^{-2i\pi\xi x}d\xi.$$

(a) Montrer que
$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x(u).$$
Montrer aussi que
$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{F}_x(u).$$

(b) Pour chaque $x\in\mathbb{R}$ fixé, on note $v(t)=\mathcal{F}_x(u)(t,x)$. Montrer que v est solution d'une équation différentielle en t.

(c) Résoudre cette équation.

(d) En déduire la valeur de u - on rappelle que
$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right)(\xi)=e^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

2. Synthèse : vérifier que la fonction u mise en évidence lors de l'analyse est bien solution de l'équation de la chaleur.

Exercice 10 - Espace de Wiener - *Troisième année* - $\star\star\star$

On note $W=L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, espace de Wiener constitué des fonctions intégrables qui sont également la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

1. Montrer que $f\in W \iff f\in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $f\in W \implies f\in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p\in[1,+\infty]$.
3. Montrer que $f\in W \iff \hat{f}\in W$.
4. Montrer que si $(f,g)\in W^2$ alors $f\star g\in W$ et $fg\in W$.
5. Pour $f\in W$, on pose $N(f)=\|f\|_1+\|\hat{f}\|_1$. Montrer que N est une norme sur W.
6. Dans cette question, on va prouver que W, muni de la norme N, est un espace de Banach. Pour cela, on considère (f_n) une suite de Cauchy de W pour cette norme.
   (a) Montrer l'existence de $f\in L^1(\mathbb{R})$ et de $g\in L^1(\mathbb{R})$ tels que $\|f_n-f\|_1\to 0$ et $\|\hat{f}_n-g\|_1\to 0$.
   (b) Montrer que $\hat{f}=g$ presque partout.
   (c) En déduire que la suite (f_n) converge dans (W,N), puis que (W,N) est un espace de Banach.
7. On pose $h(x)=e^{-\pi x^2}$, et on pose $h_n(x)=nh(x/n)$, dont on rappelle que c'est une unité approchée.
   (a) Prouver que si $f\in L^1(\mathbb{R})$, alors $f\star h_n$ est continue.
   (b) Prouver que si $f\in L^1(\mathbb{R})$, alors $f\star h_n$ est dans W.
8. (a) Soit $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\|f\star h_n-f\|_p\to 0$.
   (b) En déduire que W est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p\in[1,+\infty[$.
9. (a) Soit $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C_0(\mathbb{R})$. Montrer que $\|f\star h_n-f\|_\infty\to 0$.
   (b) En déduire que W est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$.

Exercice 11 - Non-surjectivité (bis) - *Quatrième année* - ⋆⋆

1. Soit g_n l'indicatrice de $[-n, n]$, et h l'indicatrice de $[-1, 1]$. Calculer explicitement $g_n \star h$.
2. Montrer que $g_n \star h$ est la transformée de Fourier de
$$f_n = \frac{1}{x^2\pi^2}\sin(2\pi nx)\sin(2\pi x).$$
3. Montrer que $\|f_n\|_1 \to +\infty$.
4. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas un opérateur surjectif de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$.
5. Montrer que son image est dense.

Exercice 12 - Une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ - *Quatrième année* - ⋆⋆

1. Soit H un espace de Hilbert, et E un sous espace vectoriel de H.
   (a) Montrer que $(E^\perp)^\perp = \overline{E}$.
   (b) En déduire $E^\perp = \{0\}$ si, et seulement si, E est dense dans H.
2. On suppose désormais que $H = L^2(\mathbb{R})$. Le but est d'étudier la famille $(x^n e^{-x^2/2})$.
   (a) Montrer qu'il s'agit d'une famille libre.
   (b) Supposons qu'il existe une fonction $h \in H$ telle que $\langle h, x^n e^{-x^2/2}\rangle = 0$ pour tout n. Montrer que la transformée de Fourier de $x \mapsto h(x)e^{-x^2/2}$ est bien définie, et est de classe C^∞. On note g cette fonction,
   $$g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}h(x)e^{-2i\pi xt}dx.$$
   Que vaut $g^{(n)}(0)$?
   (c) Montrer qu'à l'aide de la formule précédente, on peut en fait définir g comme fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Que dire de g ?
   (d) En déduire que $h = 0$.
3. (a) Démontrer que la famille s'orthonormalise en une famille $(H_n(x)e^{-x^2/2})$, où H_n est un polynôme de degré n (que l'on ne demande pas de calculer). Que dire de la famille $(H_n(x)e^{-x^2/2})$?
   (b) Démontrer que les H_n sont égaux, à un coefficient près (que l'on ne demande pas de calculer), aux polynômes de Hermite
   $$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Cas L^2

Exercice 13 - Fonction triangle - *Troisième année* - ⋆

On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ 1-x & \text{si } 0\leq x<1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

est $\hat{f}(t)=\frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2t^2}$. Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx$.

Exercice 14 - Sinus cardinal - *Troisième année* - ⋆

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction caractéristique d'un intervalle $[a,b]$.
2. Soit $\theta(x)=\frac{\sin x}{x}$. La fonction θ est-elle dans L^1 ? Dans L^2 ? Calculer sa transformée de Fourier-Plancherel.

Exercice 15 - Fourier et Fourier-Plancherel - *Troisième année* - ⋆⋆

Pour $f\in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Pour $g\in L^2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}(g)$ la transformée de Fourier-Plancherel de g.

1. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $g\in L^2(\mathbb{R})$. Parmi les deux formules suivantes, laquelle peut avoir un sens ?
$$\widehat{f\star g}=\hat{f}\star\mathcal{F}(g) \text{ ou } \mathcal{F}(f\star g)=\hat{f}\mathcal{F}(g).$$
La démontrer.
2. Soit $f,g\in L^2(\mathbb{R})$. Parmi les deux formules suivantes, laquelle peut avoir un sens ?
$$\mathcal{F}(f)\star\mathcal{F}(g)=\mathcal{F}(fg) \text{ ou } \mathcal{F}(f)\star\mathcal{F}(g)=\widehat{fg}.$$
La démontrer.
3. On note $f_a(x)=\frac{\sin(\pi ax)}{\pi x}$. Déduire de la question précédente $f_a\star f_b$, avec $a,b>0$.
4. Montrer que l'équation $f\star f=f$, où $f\in L^2(\mathbb{R})$ admet une infinité de solutions. Comparer avec le cas où $f\in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 16 - Densité - *Troisième année* - ⋆⋆

On rappelle qu'une partie A d'un espace de Hilbert H est totale dans H (ie $\mathrm{vect}(A)$ est dense dans H) si et seulement si $A^\perp=\{0\}$.

1. Soit $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $x\in\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{F}(\tau_x f)(y)=e^{-2\pi ixy}\mathcal{F}f(y)$ pour presque tout $y\in\mathbb{R}^n$.
2. Soit $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathcal{F}(f)=0$ sur un ensemble A de mesure strictement positive. Montrer qu'il existe $g\neq 0$ telle que $\langle g,h\rangle=0$ pour tout $h\in\mathrm{vect}(\tau_x f;\ x\in\mathbb{R}^n)$.
3. En déduire que si $\mathrm{vect}(\tau_x f; x\in\mathbb{R}^n)$ est dense, alors $\mathcal{F}(f)\neq 0$ presque partout.
4. Réciproquement, on suppose que $\mathcal{F}(f)\neq 0$ presque partout, et on suppose que $g\perp\mathrm{vect}(\tau_x f; x\in\mathbb{R}^n)$. Montrer que la transformée de Fourier (ordinaire !) de $\overline{\mathcal{F}(f)}\mathcal{F}(g)$ est identiquement nulle. Conclure que $\mathrm{vect}(\tau_x f; x\in\mathbb{R}^n)$ est dense.

Exercice 17 - Une projection - *Troisième année* - ⋆⋆⋆

On rappelle les résultats suivants :

- Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{fg} = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.
- $\mathcal{F}(1_{-[a,a]}) = \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$ et réciproquement $\mathcal{F}(\sin x/x) = \pi \times 1_{[-1/2\pi, 1/2\pi]}$.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose

$$Pf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin y}{y} dy.$$

1. Justifier que Pf est bien définie et est une fonction continue.
2. Montrer que $Pf \in L^2(\mathbb{R})$ (on s'aidera des rappels, et on pourra écrire $f = \mathcal{F}(g)$).
3. En déduire que $\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2$, et que $P \circ P = P$.

Le cas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Exercice 18 - Produit et produit de convolution - *Troisième année* - $\star$

Soient f et g deux élements de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Justifier que fg et $f \star g$ sont encore éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 19 - Une estimation d'intégrale - *Troisième année* - $\star$

Soit $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que
$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\|_2 = (2\pi)^2 \left\| xy\hat{f} \right\|_2.$$
2. Obtenir une estimation du même type pour $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_2$.
3. En déduire que
$$2 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\|_2 \leq \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_2.$$

Exercice 20 - Principe d'incertitude d'Heisenberg - *Troisième année* - $\star\star$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi^2 = 1$.

1. Montrer que
$$2 \int_{\mathbb{R}} t\varphi'(t)\varphi(t) = -1.$$
2. En déduire que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |\varphi(t)|^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi}.$$
3. Dans quels cas a-t-on égalité ?