Fonctions intégrables

Exercice 1 - Fonction triangle - *Troisième année* - ⋆
Calculer intervalle par intervalle, en faisant une intégration par parties.

Exercice 2 - Calcul d'une transformée de Fourier par résolution d'une équation différentielle - *L3/Math Spé* - ⋆⋆
Dériver f puis faire une intégration par parties pour trouver l'équation différentielle vérifiée.

Exercice 3 - Semi-groupe de Poisson - *Troisième année* - ⋆

1. Séparer les intégrales sur $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$.
2. Prendre $\alpha = 2\pi$.
3. Quel est l'effet de la transformée de Fourier sur le produit de convolution ?
4. Dériver....

Exercice 4 - Régularité - *Troisième année* - ⋆
Justifier d'abord que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, puis utiliser la formule d'inversion de la transformée de Fourier.

Exercice 5 - - *Troisième année* - ⋆⋆

Exercice 6 - Non-surjectivité de la transformée de Fourier - *Troisième année* - ⋆⋆

1. Découper l'intégrale en 2 autour de 0, et faire le changement de variables $u = -t$ dans la première intégrale.
2. Prouver la convergence à l'aide d'une intégration par parties. La continuité est évidente, pour la bornitude, étudier la limite en $+\infty$.
3. Pour la première partie, il suffit d'utiliser le théorème de Fubini (justifier !). Pour la seconde, le théorème de convergence dominée (justifier !).
4. (a) Trivial !
   (b) Utiliser l'injectivité de la transformée de Fourier !
   (c) Que vaut $\lim_{R\to+\infty} \frac{g(t)}{t}dt$?

Exercice 7 - Transformée de Fourier et produit de convolution - *Troisième année* - ⋆

1.
2.

Exercice 8 - Semi-groupe de la chaleur - *Troisième année* - ⋆
Utiliser le fait que si $f(x) = e^{-a\|x\|^2}$, alors on a $\hat{f}(x) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}\|x\|^2}$. Pour la seconde question, prendre la transformée du produit de convolution, et utiliser l'unicité.

Exercice 9 - Une équation intégrale - *Troisième année* - ⋆

1. Poser $f(x) = e^{-|x|}$, et calculer $u \star f$.
2. Supposer qu'il existe une solution intégrale. Appliquer la transformée de Fourier, et obtenir une relation sur $\hat{u}$. Montrer qu'elle n'est compatible avec le fait que $\hat{u}$ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrale ssi $\beta \in]0, 1/2[$. Inverser alors la transformée de Fourier.

Exercice 10 - Equation de la chaleur - *Troisième année* - $\star\star\star$

1. (a) Appliquer la transformée de Fourier à l'équation aux dérivées partielles.
   (b) Ne pas oublier la constante en x. Pour obtenir sa valeur en fonction des données de l'énoncé, regarder les valeurs pour $t = 0$.
   (c) Remarquer que la transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit.
2.

Exercice 11 - Espace de Wiener - *Troisième année* - $\star\star\star$

1.
2. Prouver d'abord que f est dans L^∞. Pour montrer que f est dans L^p, dominer $|f(t)|^p$ en fonction de $\|f\|_\infty$ et $|f(t)|$.
3. Un sens est trivial. Pour l'autre, utiliser la formule de réciprocité.
4. Utiliser le lien entre transformée de Fourier, produit de convolution et produit de fonctions. Utiliser aussi les deux questions précédentes pour les appartenances à $L^1(\mathbb{R})$.
5. Vérifier les 3 axiomes.
   (a) Se ramener à la complétude de $L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Utiliser la continuité de la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$.
   (c) Résumer les travaux précédents.

   (a) Théorème de convergence dominée.
   (b) Question précédente.

Exercice 12 - Non-surjectivité (bis) - *Quatrième année* - $\star\star$

1.
2. Faites le contraire de ce qu'on devrait faire....
3. On pourra utiliser que $|sinx| \geq \frac{2}{\pi}x$ si x est dans $[0, \pi/2]$.
4. Utiliser le théorème de l'application ouverte.
5. Utiliser par exemple $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 13 - Une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ - *Quatrième année* - $\star\star$

1. (a) Une inclusion est facile. Pour l'autre, prendre y qui n'est pas dans $\overline{E}$, et montrer que y n'est pas dans $(E^\perp)^\perp$ (on pourra considérer le projeté orthogonal de y sur $\overline{E}$.

(b) Immédiat !

(a) Regarder la limite en l'infini.

(b) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

(c) Utiliser le théorème donnant la régularité des intégrales à paramètres pour les fonctions holomorphes.

(d) Utiliser la bonne propriété de la transformée de Fourier.

(a)

(b)

Cas L^2

Exercice 14 - Fonction triangle - *Troisième année* - ⋆
Utiliser la relation de Parseval.

Exercice 15 - Sinus cardinal - *Troisième année* - ⋆

1. Calcul facile, pour peu qu'on n'oublie pas le cas $a = b$.
2. S'aider de la première question pour des valeurs particulières de a et b, et inverser la transformée de Fourier.

Exercice 16 - Fourier et Fourier-Plancherel - *Troisième année* - ⋆⋆

Exercice 17 - Densité - *Troisième année* - ⋆⋆

Exercice 18 - Une projection - *Troisième année* - ⋆⋆⋆

Le cas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Exercice 19 - Produit et produit de convolution - *Troisième année* - ⋆
Utiliser la transformée de Fourier

Exercice 20 - Une estimation d'intégrale - *Troisième année* - ⋆
Poser $g = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Quelle est la transformée de Fourier de g ?

Exercice 21 - Principe d'incertitude d'Heisenberg - *Troisième année* - ⋆⋆