

Feuille de TD 6
Variable aléatoire discrète

Exercice 1.

Dans un aéroport, la durée du processus d'atterrissage d'un avion, mesuré en minutes, est une variable aléatoire T dont la densité de probabilité est $f(t) = te^{-t}$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les probabilités des événements : $(T > 2)$; $(1 < T < 3)$; $(1 < T < 3)$ sachant que $(T < 4)$.

Exercice 2.

Exprimée en heures, la durée de vie D d'un certain modèle d'ampoule électrique est une variable aléatoire de densité f donnée par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c}{x^2} \text{ si } x > 200 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

1. Calculer c .
2. On contrôle l'état d'une ampoule après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité est-elle hors d'usage ?
3. On équipe un local souterrain de 5 de ces ampoules électriques, neuves. On suppose que les durées de vie $D_1, \dots, D_5$ de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f . On contrôle l'état des ampoules après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité deux (exactement) des ampoules sont hors d'usage ?

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, et soit X aléatoire de densité f définie par

$$f(x) = ax(4-x) \text{ si } 0 \leq x \leq 4 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

- 1) Déterminer la valeur de a qui fait de f une densité de probabilité.
- 2) Déterminer la fonction de répartition de X .
- 3) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire réelle de densité la fonction

$$f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2) \text{ si } |x| \leq 1 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

- 1) Déterminer la fonction de répartition de X .
- 2) Calculer les probabilités $P(X < \frac{1}{4})$, $P(X \geq -\frac{2}{5})$ et $P(2|X| \leq 1)$.
- 3) Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 5.

La durée de vie V en heures d'une batterie suit une loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

- 1) Vérifier que f est une densité de probabilité.
- 2) Déterminer la fonction de répartition de V .
- 3) Calculer $P(V > 50)$, $P(V \leq 10)$, $P(10 \leq V \leq 50)$.
- 4) Déterminer l'espérance de V .

Exercice 6.

La durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle. La variable aléatoire X a donc une densité de probabilité de la forme

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

- 1) Déterminer la fonction de répartition de X .
- 2) On a constaté expérimentalement que 95.12% de ces composants étaient encore en état de marche au bout de 25 semaines de fonctionnement. Montrer que cette constatation permet de fixer à 0.002 le paramètre λ .
- 3) Quelle est la probabilité qu'un composant de ce type soit en état de marche au bout de 100 semaines de fonctionnement ?
- 4) Sachant qu'un de ces composants a bien fonctionné pendant 100 semaines, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de la 150^{ème} semaine ?

Exercice 7.

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , pour quelle valeur de x les événements $(X < x)$ et son contraire ont-ils même probabilité ? Que vaut-elle ?

Exercice 8.

Un stock important comprend 40% de transistors de type A et 60% de type B . Exprimée en heures d'utilisation, la durée de vie d'un transistor de type A suit une loi exponentielle de paramètre 1 ; la durée de vie d'un transistor de type B suit une loi exponentielle de paramètre 2.

On prend au hasard un transistor dans le stock. On note D sa durée de vie.

1. Calculer $P(D \geq 2)$.
2. On constate que le transistor que l'on a tiré au hasard fonctionne toujours au bout de deux heures d'utilisation, avec quelle probabilité est-il du type A ?